UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE AIX-MARSEILLE II
UFR DE SCIENCES ECONOMIQUES ET DE GESTION
ECOLE DOCTORALE DE SCIENCES ECONOMIQUES ET DE GESTION D'AIX-MARSEILLE

THESE

Pour obtenir le grade de Docteur en Sciences Economiques

Mention : Economie du travail

Investissement dans le capital humain et risque : Fondements théoriques et perspectives empiriques

Présentée et soutenue publiquement par

David TOUAHRI

Le 16 Novembre 2009

Directeur de thèse : Saïd Hanchane,
Directeur de l'Instance Nationale d'Evaluation, Conseil Supérieur de l'Enseignement, Maroc, et Chercheur HDR, CNRS-LEST

Jury :

M. Saïd Hanchane, Chercheur HDR, CNRS-LEST, Directeur de thèse

M. Abraham Lioui, Professeur à l'EDHEC, Rapporteur

M. Philippe Mossé, Directeur de Recherches CNRS-LEST, Président du Jury

M. François-Charles Wolff, Professeur à l'Université de Nantes, Rapporteur

La faculté n'entend donner aucune approbation ou improbation aux opinions émises dans les thèses. Ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.

Résumé

Cette thèse étudie les effets du risque sur l'investissement dans le capital humain. Le premier chapitre présente et discute les contributions les plus significatives en économie de l'éducation qui replacent l'étude de l'accumulation du capital humain dans un contexte d'incertitude. Trois types d'approches sont distingués. Les modèles à deux périodes avec offre de travail exogène sont exposés dans un premier temps. Dans un deuxième temps, ces modèles sont réexaminés dans le cas où l'offre de travail est endogène. Pour terminer, nous discutons de modèles plus généraux, faisant référence de façon explicite à l'ensemble du cycle de vie de l'individu et permettant une identification séparée des effets des différentes sources de l'incertitude. Bien que l'on ne puisse pas tirer de conclusions définitives, il semble que les effets du risque sur l'investissement en éducation dépendent de la nature des sources d'incertitude. Sur la base de ce bilan, nous développons dans le deuxième chapitre un modèle de programmation dynamique en temps continu dans lequel plusieurs sources d'incertitudes sont prises en compte, concernant à la fois le processus d'accumulation du capital humain et le marché du travail. Nous commençons par définir la structure optimale de l'investissement en capital humain dans un cadre complètement général, du point de vue des préférences individuelles et des processus stochastiques. Puis, nous spécifions les préférences des individus, afin d'obtenir des solutions explicites et de pouvoir étudier en détail l'impact de chaque source d'incertitude sur l'investissement dans le capital humain. Nous intégrons au modèle un vecteur de variables d'état nous permettant d'étudier les stratégies de couverture intertemporelle contre le risque, en particulier

contre le risque de chômage. Nous montrons que l'effet global des différents risques est négatif, sauf s'il est compensé par une prime de risque suffisamment forte. L'incapacité du modèle à faire apparaître l'éducation comme une protection face au risque, nous conduit dans le chapitre 3, à construire un modèle de décision dans lequel le système de formation produit à la fois des compétences productives (hypothèse de capital humain) mais aussi de l'information sur la véritable productivité des individus (hypothèse de signal). Nous réévaluons, dans ce cadre théorique nouveau, les effets de l'incertitude sur la demande optimale d'éducation. Nous montrons qu'avec l'introduction d'effets de signal, l'éducation peut être utilisée comme un moyen de couverture face aux risques, et en particulier contre le risque de chômage futur. Le dernier chapitre traite de la relation empirique entre l'éducation et le risque. La discussion autour des principales contributions et des différentes méthodes d'estimation employées, permet de dresser un bilan des problèmes économétriques qui se posent lorsque l'on veut identifier l'effet du risque sur les rendements de l'éducation ou sur les choix éducatifs directement. La difficulté essentielle est de pouvoir isoler l'effet des différentes sources de risque et celui de l'hétérogénéité non observée sur les rendements éducatifs. Sur la base des restrictions théoriques suggérées dans les premiers chapitres nous essayons de définir une stratégie d'estimation permettant d'identifier le sens de la relation éducation-risque.

Acknowledgements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur Saïd Hanchane d'avoir accepté de diriger ma thèse. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a accordé, sa disponibilité, ses encouragements, son soutien mais également pour la passion de la recherche qu'il a su me transmettre. Qu'il reçoive toute ma gratitude.

Mes remerciements vont également à Messieurs Philippe Mossé, François-Charles Wolff et Abraham Lioui pour m'avoir fait l'honneur d'être membres de mon jury. En particulier Monsieur Philippe Mossé pour avoir accepté de présider cette soutenance, Monsieur François-Charles Wolff et Monsieur Abraham Lioui pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

Je suis extrêmement reconnaissant à l'ensemble des membres du LEST, chercheurs, doctorants, ITA, qui ont contribué de près ou de loin, par nos discussions formelles ou informelles à la cafétéria, dans les couloirs, à l'évolution de cette thèse. Plus particulièrement, je remercie les chercheurs Vanessa Di Paola et Stéphanie Moullet ainsi qu'Isabelle Recotillet et Arnaud Dupray (du Céreq) pour leurs conseils, Philippe Mossé qui a toujours cru en mon travail, et à un titre autant scientifique que personnel Eric Verdier.

J'adresse également ma profonde gratitude envers deux personnes ressources du laboratoire que j'affectionne particulièrement, Laurence Massé et mon ami Stéphane Marquez.

Cette thèse n'aurait jamais abouti sans l'appui de la directrice du LEST Ariel Mendez. Son aide au niveau des démarches administratives, au niveau scientifique mais aussi et surtout sur le plan humain, m'ont fait garder le cap au cours de ce travail. Je lui suis extrêmement redevable.

Merci aux différentes générations de doctorants pour l'ambiance partagée, leurs conseils et suggestions. Je pense d'abord aux doctorantes de ma génération, Karine et Aline. Je remercie également la nouvelle génération Isabelle, Manuela et Audrey pour leur aide, leur relecture sans oublier les doctorantes de mon bureau Noémie et Valérie pour leurs encouragements et l'aide précieuse qu'elles m'ont apporté pour la finalisation de cette thèse.

Il me tient particulièrement à cœur de remercier mes amis de toujours Brice et Laeti pour leur soutien sans faille tout au long de ces années.

Merci à mon frère Julien qui a toujours été là pour m'encourager, ainsi qu'à ma grand-mère mémé nénette, dont je sais qu'elle a prié à de nombreuses reprises pour la réussite de son petit fils.

Merci à Camille, ma compagne, qui a éprouvé avec moi les difficultés de la thèse. Son affection, son soutien et sa patience m'ont apporté l'équilibre nécessaire à l'aboutissement de ce travail.

Enfin, je suis très reconnaissant à l'égard de mes parents Alain et Isabelle qui m'ont toujours encouragé. Je les remercie profondément pour le soutien à tous points de vue qu'ils m'apportent depuis toujours. Je leur dédie ce travail.

Table des matières

Introduction

Les effets de l'éducation sont multiples, aussi bien au plan microéconomique que macroéconomique, autant en amont qu'en aval de l'activité productive. Au niveau macroéconomique, il est bien établit aujourd'hui que l'éducation est au cœur de la croissance économique des nations. D'abord mis en évidence de manière indirecte à travers son effet sur le progrès technique par Solow (1956) et Nelson et Phelps (1966) puis par Romer (1990) et Aghillon et Howitt (1998), l'impact direct et positif de l'éducation sur la croissance est clairement établi notamment par Lucas (1988) et Mankiw, Romer et Weil (1992). En amont de l'activité productive, les modèles à générations imbriquées établissent que la croissance de long terme repose en grande partie sur la transmission intergénérationnelle du capital humain (Azariadis et Drazen, 1990). En aval de l'activité, l'éducation est génératrice d'externalités positives (Benabou, 1996).

Ces effets se traduisent également au plan microéconomique. Les travaux pionniers de Becker et Tomes (1979) sur la transmission intergénérationnelle du capital humain éclairent l'influence des parents sur les capacités, les choix et la réussite scolaire de leurs enfants, et ont ouvert le débat en économie sur les questions de production et de reproduction des inégalités devant la réussite scolaire[1] et le succès économique des individus. Au plan individuel, il est également reconnu que l'éducation favorise l'acquisition de capital culturel, l'intégration et la citoyenneté, pouvant être à l'origine d'externalités positives pour la société. L'ensemble de ces effets non monétaires de l'éducation sont traités de manière approfondie dans le rapport de Baudelot et Leclercq (2004). Enfin, depuis les travaux fondateurs de Becker (1962, 1964), Shultz

[1]Ces questions sont traitées depuis longtemps en sociologie. Il ressort que l'éducation des parents mais aussi plus globalement l'environnement socio-culturel influence beaucoup plus que le revenu familial la réussite scolaire de leurs enfants. Selon Bourdieu (1966), "c'est le niveau culturel global du groupe familial qui entretient la relation la plus étroite avec la réussite scolaire de l'enfant."

(1961) et Mincer (1974) sur le capital humain, l'éducation est reconnue comme étant le déterminant essentiel de la structure et de l'évolution des revenus individuels. L'effet positif de l'éducation sur les salaires est sans doute l'un des résultats empiriques les plus robustes en économie.

Notre travail de thèse est une contribution à la littérature microéconomique sur les déterminants et les effets de l'éducation sur la distribution des revenus individuels. Elle s'inscrit dans le prolongement de la théorie du capital humain.

Le modèle canonique de capital humain est fondé sur l'idée que les individus, en renonçant à un gain immédiat, peuvent à travers l'éducation, augmenter leurs capacités productives (leur capital humain) et la valeur marchande qui lui est associée (le salaire). L'éducation est considérée comme un investissement, au même titre que le capital physique ou le capital financier. Les stratégies éducatives sont alors des stratégies d'investissement définies par la comparaison des rendements marginaux du capital humain et du capital financier[2].

Alors que la recherche sur l'investissement dans le capital physique et financier progressait dans l'analyse des propriétés des rendements, mettant en avant le rôle fondamental du risque associé aux rendements dans les stratégies d'investissement, la littérature sur le capital humain est resté concentrée sur l'étude des rendements moyens de l'éducation et de ses déterminants. L'équation de gains de Mincer (1958) qui est la traduction empirique du modèle initial de capital humain, est le point de départ d'une vaste littérature consacrée à l'évaluation des rendements de l'éducation. Les avancées de cette littérature, synthétisées notamment par Card (2001), sur le traitement des problèmes de sélection, d'endogénéité et d'hétérogénéité individuelle, ont permis de mieux comprendre comment l'environnement présent et passé d'un individu affectait les rendements de l'éducation et les différences de choix scolaires entre les individus.

[2]Tant que le rendement marginal du capital humain est supérieur au capital financier, l'individu poursuit son investissement. Lorsque le rendement du capital humain égalise celui du capital financier, il est optimal pour l'individu d'arrêter son investissement dans le capital humain, de travailler et placer le revenu de son travail sur le marché financier.

En revanche, le futur, à travers l'incertitude qui le caractérise, a fait l'objet de beaucoup moins d'attention de la part des économistes de l'éducation. Or, sur le marché du travail français, on assiste depuis une trentaine d'année, au développement d'un chômage des jeunes souvent récurrent et parfois long, accompagné de déclassements salariaux lors des premiers emplois (Forgeot et Gautié, 1997). La vulnérabilité des jeunes à l'entrée du marché du travail s'exprime non seulement par les difficultés accrues pour trouver un emploi qui correspond à leur niveau d'étude (Giret et Hatot, 2001), mais aussi par des taux d'emploi beaucoup plus sensibles que les autres catégories d'actifs à la conjoncture économique (Fondeur, 1996, Fondeur et Minni, 1999). On assiste également, dans le système éducatif, à une diversification des filières et des parcours de formation (Kirsch, 1998) et à une baisse de sélectivité dans le système éducatif (Magnac et Thesmar, 2002). A un niveau agrégé, cette hétérogénéité accrue peut être de nature à accentuer l'incertitude sur la qualité des parcours. Au niveau individuel, cette hétérogénéité peut brouiller la perception que peuvent avoir les employeurs des potentiels de productivité des élèves. Dans ces conditions, il peut être également difficile pour les individus d'évaluer leurs propres capacités productives à la sortie du système scolaire.

Ces éléments de contexte montrent que le risque est important. Lorsqu'un individu s'engage dans un parcours de formation, il fait face à plusieurs types de risques. Premièrement, l'individu n'est jamais certain de réussir. L'adéquation entre les capacités scolaires, les goûts des étudiants et les capacités requises dans la filière de formation n'est jamais parfaite. Deuxièmement, au delà des risques d'abandon scolaire et de réorientation, l'individu peut avoir des difficultés à évaluer le volume de ses compétences productives accumulées qui seront valorisées sur le marché du travail. Troisièmement, quand bien même l'individu connaîtrait-il son volume de compétences, il peut ne pas connaître parfaitement la valeur future attribuée par le marché à ses connaissances ni son évolution.

Le modèle standard de capital humain a été initialement développé dans un cadre complètement certain, occultant de son analyse la nature risquée des rendements du capital humain et par conséquent un déterminant potentiellement important de l'investissement. Ceci peut être problématique dans la mesure où c'est au modèle standard que font références les économistes et *in fine* les pouvoirs publics, pour évaluer l'efficacité de l'éducation et de la formation. L'hypothèse d'imperfection de l'information des individus paraît aujourd'hui beaucoup plus réaliste pour analyser les stratégies individuelles en matière d'éducation et évaluer l'efficacité.

Dans ce travail de thèse, nous replaçons la problématique de l'investissement en capital humain dans un cadre théorique plus général qui intègre l'incertitude sur les rendements de l'éducation. Dans ce cadre, l'objectif premier de la thèse est d'étudier l'impact de l'incertitude sur les choix individuels[3]. Notre travail montre en quoi la prise en compte du risque produit des résultats nouveaux pour l'analyse de la demande d'éducation. Nous montrons en particulier que selon les facteurs qui rendent l'avenir incertain, les stratégies de rentabilisation et de protection vis-à-vis du risque vont conduire les individus à prendre des décisions d'éducation différentes.

L'étude de la relation entre le risque et l'investissement dans le capital humain a donné lieu à trois contributions théoriques qui structurent la thèse autour des trois premiers chapitres de la thèse et nous conduisent dans un quatrième chapitre à aborder les questions empiriques.

[3]Il est important de clarifier ce que nous désignons par risque et incertitude. Pour cela, nous nous appuyons sur les définitions données par Kast (1993). Plusieurs situations d'incertitude existent. La plus développée par la théorie concerne le cas où l'incertitude porte sur des variables dont la distribution de probabilité est parfaitement connue. C'est à ce type d'incertitude qu'est généralement réservé le terme de situation de risque. En pratique peu de décisions sont prises en situation de risque. Par contre, un certain nombre de situations d'incertitude peuvent se ramener à des situations de risques. Lorsque l'information dont dispose l'individu peut être résumée sous la forme d'une distribution de probabilités sur les conséquences de ses choix, le problème de décision se ramène à une situation de risque. Les lois de probabilité sont alors considérées comme étant des représentations des jugements des individus sur la confiance qu'ils accordent à la réalisation des évènements. Les distributions de probabilité sur les évènements futurs sont alors subjectives. C'est uniquement à ce type d'incertitude que fait référence cette thèse. L'incertitude non probabilisable n'est absolument pas prise en compte. Le cas de l'ambigüïté, situation intermédiaire entre risque et incertitude radicale, dans laquelle la connaissance du futur par les individus ne peut être résumée par une distribution mais par un ensemble de distributions de probabilités, n'est pas non plus traité. C'est pourquoi, par abus de langage, nous emploierons tout au long de la thèse indifféremment les termes de risque et d'incertitude, comme c'est le cas dans la littérature.

Ainsi, le premier chapitre, "Le rôle de l'incertitude dans les choix d'investissement en éducation : un examen de la littérature théorique", dresse un bilan et une analyse de la littérature qui traite de la question du risque et de son effet sur le processus d'accumulation du capital humain. Notre synthèse détaille la résolution et les résultats des travaux les plus influents. Elle fournit également les outils théoriques nécessaires pour appréhender cette littérature relativement complexe, qui se situe au carrefour de l'économie de l'éducation et de la finance moderne.

Nous étudions trois générations de modèles : les modèles à deux périodes avec offre de travail exogène, les modèles à deux périodes avec offre de travail endogène et les modèles dynamiques.

Dans les modèles à deux périodes, le risque est représenté par un paramètre qui capte toutes les sources d'incertitude pouvant affecter le salaire. Dans ces modèles, l'effet du risque sur l'investissement dans le capital humain est mesuré de manière indirecte. Lorsque l'offre de travail est supposée exogène, l'effet du risque dépend uniquement de la corrélation entre le rendement moyen et le rendement marginal du capital humain. Il est généralement négatif. Lorsque l'offre de travail est endogène, les comportements d'offre de travail affectent le rendement marginal du capital humain à travers un effet revenu de sorte que le signe de la covariance entre les rendements moyens et marginaux ne permet plus de déduire le comportement optimal de l'individu face au risque.

Les modèles dynamiques apportent des résultats plus tranchés. Les modèles d'option concluent à une relation croissante entre risque et niveau d'éducation : l'accroissement du risque sur le salaire conduit les individus à repousser leur sortie du système scolaire. Le modèle de portefeuille de Williams (1979) distingue plusieurs sources d'incertitude sur le salaire, notamment celles concernant l'accumulation du capital humain (aptitude, dépréciation). Ses résultats diffèrent des prédictions précédentes. Il montre en effet que l'investissement dans le capital humain est découragé lorsque le risque relatif à l'éducation augmente.

A l'issue de notre analyse, nous parvenons à la conclusion suivante :

- Les modèles à deux périodes, dans lesquels le risque est agrégé, ne parviennent pas à établir un résultat saillant quant à l'effet du risque sur l'investissement en capital humain.
- Les modèles dynamiques différents, qui étudient l'effet de sources d'incertitudes différentes, produisent des résultats clairs mais opposés.

Ces conclusions nous amènent à construire dans le deuxième chapitre : "Investissement dans le capital humain et risques : l'éducation comme actif risqué", un modèle de programmation dynamique en temps continu qui permet d'étudier l'effet de différentes sources d'incertitude sur l'investissement en capital humain. Notre travail s'appuie sur le modèle fondateur de Williams (1979) car il est le seul à notre connaissance, à offrir un cadre d'analyse permettant de mesurer l'effet de plusieurs risques simultanément. Il prend en compte le risque sur le marché financier, à travers l'investissement que peuvent réaliser les individus dans les actifs financiers, le risque sur le marché du travail, à travers le salaire et enfin le risque sur l'accumulation de capital humain à travers l'efficacité de l'apprentissage et la dépréciation du capital humain. Williams étudie l'effet de ces différentes sources de risque et obtient un effet négatif du risque sur l'investissement optimal dans le capital humain. Nous montrons dans ce chapitre que ce résultat provient d'une hypothèse très forte, celle d'indépendance entre les déterminants de la production de capital humain et le salaire obtenu sur le marché du travail, qui fait disparaître le risque sur le salaire de l'analyse de la stratégie optimale d'investissement. Cette hypothèse néglige l'essence même de l'économie de l'éducation qui réside dans l'analyse des mécanismes par lesquels s'articulent le déroulement de l'éducation et ses modes de valorisation sur le marché du travail. Nous levons cette hypothèse et exploitons la flexibilité offerte par le modèle de Williams de manière à mettre en évidence les interactions entre les différentes sources de risque et voir comment elles affectent les stratégies d'investissement. La dynamique du modèle nous permet également d'intégrer des variables d'états : des variables exogènes au processus de capital humain qui, dans le temps, peuvent affecter le rendement du capital humain. L'intérêt est alors de voir comment l'individu peut se couvrir contre ce type de risque. Nous concentrons notre analyse sur une variable particulièrement importante en économie du travail : le taux de chômage.

Cette extension nous permet de montrer que les sources d'incertitude de nature différentes produisent un effet contradictoire sur l'investissement optimal en capital humain, confirmant les résultats des modèles antérieurs dans lesquels une seule source est spécifiée. Les risques relatifs à la capacité d'apprentissage des individus ont un effet négatif sur le niveau d'investissement en éducation, alors que le risque sur le salaire encourage l'investissement. L'augmentation du risque portant sur le taux de chômage futur a un impact négatif sur l'investissement dans le capital humain. L'apport de notre modèle est d'expliciter comment les stratégies de rentabilisation et de couverture contre les différents risques vont influencer les décisions d'investissement dans le capital humain. Le principe général est le suivant : pour un individu averse au risque, un investissement risqué n'est entrepris uniquement s'il génère une prime de risque suffisante, c'est-à-dire s'il est compensé par le marché. Sinon, l'individu se couvre contre ce risque en réduisant son investissement. Ainsi, nous montrons que seul le risque sur le salaire génère une prime de risque suffisamment forte pour entrainer une hausse de la demande individuelle d'éducation. Les autres sources d'incertitude, y compris celle sur le taux de chômage, ont un effet négatif car l'effet négatif de couverture domine.

Au final, l'éducation peut augmenter avec le risque si le risque sur le salaire est plus important que les autres. De ce point de vue, la perception qu'ont les individus des différents risques et du poids qu'ils leur accordent est fondamentale dans la décision d'investir en éducation.

Ce modèle dynamique et stochastique de capital humain nous apprend que si l'éducation peut augmenter avec le risque c'est uniquement pour des motifs de spéculation et jamais pour des raisons de couverture.

Dans le troisième chapitre : "capital humain risques et effets de signal", nous montrons que l'introduction du risque dans le modèle de capital humain standard conduit à considérer l'éducation comme un actif risqué. Par nature du modèle, lorsqu'un individu décide d'augmenter son niveau d'éducation, il accroît dans le même temps son exposition au risque. Dans ces conditions, un individu averse au risque réduira toujours son investissement dans l'éducation pour se couvrir contre le risque.

Le but de ce chapitre est de définir les conditions théoriques sous lesquelles l'éducation peut apparaître comme une forme de protection face aux différents risques auxquels sont confrontés les individus. Pour cela, nous adoptons une conception plus large de l'éducation que celle de la théorie du capital humain standard. Au delà de la fonction de production de connaissances et des compétences valorisables sur le marché du travail, l'éducation doit également être considérée comme un dispositif permettant de révéler de l'information sur la véritable productivité des individus, dans la lignée des théories du filtre et du signal. Nous construisons en effet un modèle général dans lequel l'éducation augmente la productivité individuelle et améliore la qualité de l'information sur la valeur de cette productivité. Dans ce cadre nouveau, où les effets de capital humain et de signal sont complémentaires, nous analysons l'impact de différentes sources d'incertitude : salaire, productivité et chômage, sur la demande individuelle d'éducation. Nous obtenons une structure optimale de la demande individuelle d'éducation dans laquelle les effets de couverture et de spéculation sont complètement renversés par rapport à ceux obtenus dans le chapitre 3. En particulier, nous parvenons à prédire qu'un individu averse au risque va augmenter sa demande d'éducation pour se couvrir contre les risques. Ce résultat, plutôt conforme à l'intuition et concordant avec la réalité observée, et l'un des résultats central de la thèse.

En théorie, il est possible de discriminer empiriquement entre les deux hypothèses concurrentes développées dans les chapitres théoriques concernant la nature de l'éducation en environnement incertain. L'éducation sera considérée comme un investissement risqué si l'on observe une relation positive entre le niveau d'éducation et la variance du log des salaires, et l'éducation pourra être considérée comme un dispositif de signalement si on obtient une relation inverse. C'est ce que nous tentons de faire dans le quatrième chapitre de la thèse "Education et risque : une perspective empirique".

Ce dernier chapitre de la thèse s'intéresse en effet à la relation entre l'éducation et le risque d'un point de vue économétrique.

Dans un premier temps, nous présentons une synthèse des principaux résultats que l'on trouve dans la littérature empirique. D'une manière générale, au plan empirique, le risque est mesuré à partir de la dispersion des gains observés. Deux grands types d'approches sont distingués. Les modèles de compensation salariale et les modèles hétéroscédastiques. Les modèles de compensation étudient la relation risque de manière indirecte à travers l'effet de la variance des salaires sur les salaires eux même. Si cet effet est positif cela signifie que le marché du travail rémunère le risque. La comparaison de cet effet sur différents niveaux d'éducation permet de voir si les niveaux de scolarité les plus risqués sont davantage compensés par le marché comme le suggère la théorie du capital humain. Dans tous les travaux sur la compensation le coefficient associé au risque est positif, ce qui prouve que le marché rémunère le risque, et cette compensation est plus forte pour les individus atteignant des niveaux d'éducation plus hauts mais également plus risqué que les autres.

Les modèles hétéroscédastiques mesurent directement l'impact de l'éducation sur la dispersion des rendements. Bien que les résultats de ces modèles soient moins tranchés que les précédents, les modèles les plus solides établissent un effet négatif de l'éducation sur la dispersion des gains.

Ces résultats contrastés concernant la relation éducation-risque nous amènent à discuter la façon dont est mesuré le risque dans les travaux empiriques et les problèmes d'identification économétrique que cela suscite. Il est extrêmement rare de disposer de données précises sur les anticipations subjectives permettant de connaître le véritable risque que les individus prennent en compte dans leurs décisions. Dans ces conditions, le risque doit alors être déduit de la variance observée des salaires. Le problème qui se pose est que cette dispersion ne reflète pas uniquement le risque. Elle reflète également les différences de caractéristiques individuelles non observables par l'économètre.

Toute la difficulté est alors de parvenir à différencier le risque de l'hétérogénéité non observée, c'est-à-dire ce qui est inconnu par l'individu et par l'économètre (le risque) et ce qui est connu par l'individu mais pas par l'économètre (l'hétérogénéité). Au delà des problèmes techniques d'identification, se pose la question de l'a priori que fait le chercheur sur l'information dont dispose l'individu, lorsqu'il contrôle l'hétérogénéité non observée. L'autre problème majeur que pose l'identification du risque est que la dispersion observée des rendements de l'éducation ne reflète pas le risque auquel est confronté l'individu au moment de ses choix. Elle reflète le risque *ex post*, alors que ce qui intéresse le chercheur c'est le risque *ex ante*. Dans ces conditions, retrouver la distribution *ex ante* des rendements de l'éducation à partir de la distribution *ex post* implique une correction du biais de sélection très difficile à mettre en œuvre en présence d'incertitude.

La littérature empirique définit le risque par défaut. Le risque *ex ante* associé à l'éducation est la variance observée des rendements de l'éducation, nette de toutes les autres sources de dispersion. Obtenir une mesure non biaisée du risque fait appel à des procédures d'identification toujours plus complexes.

Face à ces difficultés, nous proposons une démarche alternative plus simple. A partir de l'équation d'accumulation de capital humain théorique obtenue dans le chapitre 3, nous dérivons une équation de Mincer dans le cas le plus simple où une seule source d'incertitude est prise en compte. Nous obtenons un modèle hétéroscédastique qui fait apparaître la contribution de l'éducation et du risque *ex ante* à la variance globale du rendement de l'éducation. L'objectif est alors de voir s'il est possible d'identifier les différents paramètres de la variance, et notamment le risque *ex ante*. A l'issue de notre procédure, nous ne pouvons pas identifier précisément la valeur de ce risque *ex ante*. Ainsi nous ne pouvons pas pour l'instant l'intégrer dans un modèle de choix d'éducation et évaluer directement son effet. En revanche, nous parvenons à identifier le signe de l'effet de l'éducation sur le risque marginal. La connaissance de ce signe nous suffit à caractériser l'éducation en présence d'incertitude : actif risqué ou dispositif de signal, nous permettant ainsi de répondre à une question centrale de cette thèse.

CHAPITRE 1

Le rôle de l'incertitude dans les choix d'éducation : un examen de la littérature théorique

Résumé

Ce premier chapitre présente et discute les contributions les plus significatives en économie de l'éducation qui replacent l'étude de l'accumulation du capital humain dans un contexte d'incertitude. Trois types d'approches sont distingués. Les modèles à deux périodes avec offre de travail exogène sont exposés dans un premier temps. Dans un deuxième temps, ces mêmes modèles sont réexaminés dans le cas où l'offre de travail est endogène. Pour terminer, nous discutons de modèles plus généraux. Ces derniers font référence de façon explicite à tout le cycle de vie de l'individu et permettent une identification séparée des effets des différentes sources de l'incertitude. Tout au long de l'exposé, nous montrons que l'effet des risques sur l'investissement en éducation dépend de la nature des sources d'incertitude spécifiées.

1.1. Introduction

La théorie du capital humain a été initialement construite pour expliquer un certain nombre de faits stylisés :

- Un profil de salaire qui tend à augmenter tout au long du cycle de vie avec une légère tendance à la baisse en fin de vie active.
- Un volume horaire de travail croissant en début de vie active puis décroissant à partir d'un certain âge avec un maximum atteint plus tôt dans le cycle de vie que celui des salaires.
- Un profil de gains[1] qui augmente en début de cycle de vie et qui diminue vers la fin de la vie active.

La capacité du modèle standard de capital humain à générer des structures optimales qui reproduisent de manière satisfaisante les différents profils observés, a longtemps été mis en avant dans la littérature (Weiss, 1986). Pourtant, les prédictions de ce modèle ne sont valides que dans un contexte de stabilité de l'emploi, et plus généralement de stabilité de la conjoncture économique, car elles sont fondées sur l'hypothèse d'information parfaite. Les individus sont supposés connaître parfaitement leur situation future sur le marché du travail, en particulier la distribution des salaires correspondant à leur niveau de formation.

Or, si l'on se réfère aux éléments de contexte évoqués dans l'introduction de la thèse, cette hypothèse ne semble plus adaptée pour décrire la réalité observée. Les enquêtes *Génération* (1992, 1998, et 2004) du Centre d'étude sur les qualifications (le Céreq) montrent que les difficultés d'insertion et l'instabilité de l'emploi et des salaires tendent à devenir une caractéristique structurelle du marché du travail. Pour ces raisons, il semble donc difficile pour un élève d'anticiper parfaitement son salaire futur. Qui plus est, dans un contexte de diversification croissante de l'offre de formation (Kirsch, 1998) et de baisse de sélectivité dans le système éducatif (Magnac et Thesmar, 2002), il devient plus difficile pour les employeurs de cerner les capacités productives

[1]Le gain perçu par un travailleur correspond au produit de son temps travaillé et de son salaire perçu par unité de temps.

des futurs employés. Il est également de plus en plus difficile pour les élèves d'évaluer leurs propres compétences productives à la sortie du système éducatif. Ces éléments de contexte suffisent à montrer le décalage qui existe entre les constructions théoriques et la réalité observée. C'est pourtant au modèle standard de capital humain que font référence les économistes pour inférer sur l'efficacité du système éducatif et sur les politiques éducatives à mettre en œuvre. Il nous paraît ainsi, nécessaire de replacer la problématique de l'investissement en capital humain et celle de l'efficacité des systèmes éducatifs qui en découle, dans un cadre plus général qui prend en compte l'incertitude.

Dans ce chapitre, nous livrons un état des lieux des développements théoriques qui ont intégré l'incertitude dans l'analyse de l'accumulation du capital humain. La littérature sur cette question est relativement récente et encore très mince. C'est pourquoi, nous proposons une synthèse détaillée des modèles qui structurent aujourd'hui la recherche sur le risque et ses effets en économie de l'éducation. En particulier, nous démontrons les résultats fondamentaux de ces modèles.

Ce travail est structuré autour de trois générations de modèles. Dans la section suivante (1.2), nous présentons les modèles à deux périodes où l'offre de travail est supposée exogène. L'extension de ce modèle au cas de l'endogénéité de l'offre de travail est présentée dans la section 1.3. Elle permet de mettre en évidence l'existence d'un *effet revenu* qui peut, sous certaines conditions, conduire à une augmentation du niveau d'éducation lorsque le risque augmente. Ces deux types de modèles sont fondés sur une représentation agrégée de l'incertitude et ne permettent pas de répondre a priori et sans ambiguïté à la question de l'effet du risque sur l'investissement en capital humain. Par ailleurs, la réduction du cycle de vie des individus à deux périodes ne permet pas de mettre en évidence la nature dynamique de l'investissement en capital humain. Pour aller dans ce sens, les modèles de programmation dynamique en temps continu constituent une voie prometteuse (section 1.4). Ils permettent en effet d'améliorer les conditions d'identification des relations entre l'investissement et les différentes composantes du risque, à la fois sur le marché du travail et dans le processus d'accumulation. Dans une dernière section, nous exposons une approche alternative pour étudier la dynamique de l'investissement en capital humain dans un contexte d'incertitude. Celle-ci repose sur les principes de la théorie des options réelles, appliqués au problème de l'investissement scolaire.

1.2. Effets de l'incertitude dans un modèle à deux périodes avec offre de travail exogène

Depuis les travaux précurseurs de Schultz (1961) et Becker (1964) dans le domaine de l'éducation, la scolarité et plus généralement la formation ont été considérées comme un investissement en capital humain, au même titre que le capital physique. L'hypothèse centrale de tous les modèles de capital humain est que l'individu peut influencer son salaire par l'investissement qu'il réalise dans l'éducation. Lorsqu'il s'engage dans la formation, l'individu renonce au salaire courant qu'il percevrait s'il entrait immédiatement sur le marché du travail, dans l'espoir d'accroître ce salaire potentiel dans le futur. Dans les premières versions du modèle de capital humain, le travailleur est supposé maximiser son revenu durant sa vie. Le problème de l'individu est alors de définir un sentier optimal d'accumulation du capital humain en contrôlant son investissement dans la formation et en tenant compte de ses effets sur les gains présents et futurs. Cet arbitrage entre gains présents et futurs est le principe de base auquel obéit le comportement de l'individu sur son cycle de vie. Il est exprimé par le signe des dérivées partielles d'une fonction de gains $y = y(k, \dot{k}, h)$, qui dépend du stock de capital humain (k), de l'investissement en capital humain ($\dot{k}$) et du temps de travail h. La théorie suppose que $y_k \geq 0$, $y_{\dot{k}} \leq 0$. Cela signifie que le choix d'une activité qui génère davantage de formation réduit le revenu net courant mais accroît la capacité de gains future. Tant que l'investissement net est positif, la capacité de gain augmente. Cependant, lorsque l'investissement diminue, la capacité de gains future diminue. La combinaison de ces deux forces entraîne l'augmentation (concave) des gains observés sur le cycle de vie. Enfin, lorsque l'investissement net devient suffisamment négatif, c'est à dire lorsque la dépréciation du capital humain existant devient supérieure au stock de capital humain nouvellement créé, les gains doivent baisser.

Ce modèle de base de capital humain est capable de générer des structures optimales qui reproduisent de manière assez satisfaisante les profils de gains observés des travailleurs (Weiss, 1986). De même, lorsque l'offre de travail est endogène, les prédictions de ces modèles sont compatibles avec les données observées, à savoir un profil du volume horaire de travail croissant en début de vie active avec un sommet qui précède celui des salaires. Weiss (1986) expose une synthèse exhaustive des modèles de capital humain avec offre de travail endogène, qui fournissent tous des conclusions similaires quant au profil de l'offre de travail sur le cycle de vie.

Nous rappelons que dans ce cadre théorique, le travailleur est supposé travailler à temps plein et sans interruption d'activité. Ainsi, lorsqu'on suppose un environnement stable, un horizon économique clair et un marché du travail fonctionnant parfaitement, le modèle de capital humain paraît bien adapté pour décrire les trajectoires de la main d'œuvre. Or, les éléments de contexte actuel évoqués dans l'introduction de ce travail, nous incitent fortement à replacer la problématique de l'éducation dans un cadre incertain.

De manière générale, les recherches existantes sur le capital humain ont largement ignoré l'incertitude à laquelle fait face l'individu lorsqu'il prend ses décisions en matière d'éducation et de formation. Bien que la théorie du capital humain ait considéré, dès son origine, l'éducation comme un investissement, la nature risquée de cet investissement a longtemps été occulté de son analyse. Ceci peut être très préoccupant si l'introduction de l'incertitude altère de manière significative les prédictions du modèle standard. La question qui se pose dès lors est dans quelle mesure cette incertitude affecte le rendement et donc le niveau de l'investissement en capital humain.

La première analyse théorique rigoureuse de cette question a été proposée par Levhari et Weiss (1974), dans un modèle à deux périodes. L'hypothèse centrale du modèle est que l'individu connaît le salaire courant correspondant à son niveau d'éducation, mais il ne connaît pas le salaire qu'il touchera dans le futur. L'incertitude porte donc sur les gains futurs, ou, plus précisément, sur le rendement futur des années supplémentaires d'étude. Celle-ci est supposée provenir de deux grandes sources. La première provient du processus d'apprentissage dans le système éducatif. Elle porte sur un ensemble de caractéristiques individuelles et collectives exogènes que sont par exemple l'aptitude scolaire des élèves mais aussi la qualité des classes, des établissements, des enseignants, des filières, etc. La seconde provient du marché du travail ; elle porte sur les conditions futures d'offre et de demande de travail. Ces hypothèses, conformes à l'intuition et plutôt réalistes au regard des faits, ne se retrouvent pas dans les spécifications du modèle. En effet, ces sources d'incertitude ne sont pas distinguées. Elles sont agrégées et représentées par une variable aléatoire unique. Plus précisément, l'incertitude est prise en compte dans fonction de gain de la façon suivante :

$$y = y(e, \mu) \tag{1.1}$$

Où e désigne la proportion du temps de la première période consacrée à l'éducation et μ est la variable aléatoire captant toutes les sources d'incertitude.

$y(.)$ désigne la fonction de gains croissante et concave avec le niveau d'éducation $(y_e > 0, y_{ee} < 0)$[2].

Plusieurs mesures du risque sont possibles, mais celle qui a prévalu dans la littérature jusqu'à présent est la variance[3]. En particulier, l'incertitude qui porte sur le rendement de l'éducation est mesurée par la variance des gains (à moyenne constante). La relation entre le niveau d'éducation et le risque sera donc établie à partir du signe de la corrélation entre le niveau d'investissement en capital humain et la dispersion des gains.

[2]Les indices désignent les dérivées partielles.

[3]Plus précisément, le critère généralement retenu dans la littérature est celui de Rotchild et Stiglitz (1971) : le risque augmente si on observe un accroissement de la variance de la distribution préservant la moyenne. Par ce déplacement des poids de la distribution vers les extrémités la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur extrême est accrue.

Dans ce cadre, l'objectif de l'individu est de maximiser la valeur espérée de son utilité retirée de la consommation sur le cycle de vie[4], en contrôlant son niveau de consommation présente c_0 et son investissement en capital humain e.

$$\max_{c_0,e} V = E\left[u\left(c_0, c\right)\right] \tag{1.2}$$

Où $u\left(c_0, c\right)$ est une fonction d'utilité du type Von Neumann-Morgenstern, croissante et concave en ses arguments, de façon à exprimer le comportement d'aversion au risque des individus. Ce programme individuel d'optimisation est soumis à la contrainte de budget intertemporelle :

$$c = (A + (1 - e)y_0 - c_0)(1 + r) + y \tag{1.3}$$

Où r est le taux d'intérêt réel, A est la richesse initiale, y_0 est la capacité de gains de la première période et y dénote la capacité de gain future. A et y_0 sont supposés connus et exogènes.

Le problème auquel fait face le travailleur est similaire à celui d'un investisseur faisant face à des rendements aléatoires. Il doit définir une structure optimale d'investissement en arbitrant entre investissement en capital financier et investissement en capital humain. L'individu est donc confronté à un problème de choix de portefeuille. Dans ces conditions, il est nécessaire pour l'économiste de l'éducation de recourir aux outils de la modélisation financière, en l'occurrence la théorie du portefeuille, plus adaptée au traitement du risque. Comme le note Leutenegger (1999), "la théorie du portefeuille est la théorie du choix entre projets risqués et intègre explicitement le risque dans sa formulation : elle est la théorie du risque".

Il existe cependant deux caractéristiques particulières du problème de capital humain qui le distingue des modèles classiques de portefeuille. La grande différence entre le capital humain et le capital physique est que le capital humain ne peut pas être

[4]Il s'agit simplement de la réécriture dans un cadre incertain du modèle standard de maximisation des gains sur le cycle de vie. On notera également que le cycle de vie ici est résumé à deux périodes : le présent (indicé par zéro) et le futur (non indicé).

acheté ou vendu librement sur le marché. Il ne peut être séparé de la personne qui le possède. Contrairement au capital physique où la diversification des titres permet à l'investisseur de se couvrir contre le risque, ou du moins de le réduire, les possibilités de diversification du capital humain sont très limitées. L'individu ne peut donc contrôler que partiellement la structure de son portefeuille. C'est pourquoi, le capital humain peut paraître a priori plus risqué que le capital physique. Le second aspect distinctif, lié au premier, est que le rendement moyen du capital humain dépend du niveau d'investissement. En effet, contrairement au capital financier où le montant investi n'influence pas le rendement moyen de l'investissement, l'existence d'une telle dépendance entre l'investissement dans le capital humain et son rendement donne la possibilité d'une réduction de la variance des gains futurs quand le niveau de scolarité augmente[5]. Dans ce cas l'acquisition de capital humain général peut jouer partiellement le rôle de couverture contre le risque[6]. Ainsi, l'existence d'une relation entre le niveau d'investissement et son rendement confère au niveau d'éducation un caractère stratégique vis-à-vis du risque auquel est confronté l'individu.

Compte tenu de ces précisions, nous pouvons définir la règle de décision de l'individu et les conditions d'optimalité qui en découlent. La décision d'investir est fondée sur la comparaison des rendements marginaux espérés de chacun des investissements. Tant que le rendement marginal espéré du capital humain est supérieur à celui du capital financier, l'individu continue à investir dans le capital humain.

Les conditions de premier ordre pour la maximisation de (1.2), sous les contraintes (1.1) et (1.3)[7] s'écrivent :

$$V_{c_0} = E\left\{\frac{\partial u\left(c_0, c\right)}{\partial c_0} - (1+r)\,\frac{\partial u\left(c_0, c\right)}{\partial c}\right\} = 0 \tag{1.4a}$$

$$V_e = E\left\{\frac{\partial u\left(c_0, c\right)}{\partial c} y_0\left[\rho - (1+r)\right]\right\} = 0 \tag{1.4b}$$

[5]Pour une démonstration, cf. Levhari et Weiss (1974), pp 954, note n°10.
[6]Par exemple, en élargissant le champ des possibilités d'emploi sur le marché du travail.
[7]Les conditions de second ordre, assurant la concavité de V, sont fournies par Levhari et Weiss (1974), pp 953, note n°4.

Où $\rho = \frac{y_e(e^*,\mu)}{y_0}$ est le taux de rendement marginal du capital humain.

La condition (1.4a) établit qu'à l'optimum, aucun gain ne peut être perçu par l'individu en reportant une partie de sa consommation à la période suivante. Si le taux d'intérêt est parfaitement connu, on retrouve la condition d'optimalité classique, à savoir que le rapport des utilités marginales espérées (présente et future) égalise le taux d'intérêt réel.

La condition (1.4b) établit qu'à l'optimum, la différence, pondérée par l'utilité marginale de la consommation, entre le rendement marginal espéré du capital humain (ρ) et celui du capital financier $(1+r)$ doit être nulle, *en moyenne*. Cependant, à la marge, les taux de rendement marginaux peuvent être différents. Il suffit pour le voir, de calculer l'espérance dans la condition (1.4b) et faire apparaître l'expression des covariances :

$$\begin{aligned} & E\left\{\frac{\partial u\left(c_0^*,c\right)}{\partial c}\right\} y_0\left[E\left\{\rho\right\} - E\left\{(1+r)\right\}\right] \\ = \; & cov\left\{\frac{\partial u\left(c_0^*,c\right)}{\partial c}, r\right\} y_0 - cov\left\{\frac{\partial u\left(c_0^*,c\right)}{\partial c}, y_e\left(e^*,\mu\right)\right\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Levhari et Weiss montrent que si le taux de rendement marginal espéré du capital humain (ρ) est supérieur à celui du capital financier $(1+r)$, cela indique que, à l'optimum, l'individu perçoit le capital humain comme étant plus risqué que le capital financier. Cela signifie qu'un accroissement marginal du niveau d'éducation optimal accroît la variance des gains futurs. Dans ce cas, si l'individu est averse au risque, il sera incité à réduire son investissement en capital humain.

Pour le démontrer, Levhari et Weiss simplifie l'analyse en supposant que le taux d'intérêt (r) est parfaitement connu, de sorte que le signe de $\left(\rho_\mu\right)$, c'est-à-dire l'effet du risque sur le rendement marginal espéré du capital humain, permet de savoir si le rendement marginal espéré du capital humain est supérieur à celui du capital financier :

$$E\left\{\rho\right\} \gtreqless 1+r \quad \text{si, et seulement si} \quad \rho_\mu \gtreqless 0^{8} \tag{1.6}$$

[8] Avec $\rho_\mu = \frac{y_{e\mu}}{y_0}$.

Etant donné les hypothèses : $y_e > 0$ et $\partial^2 u/\partial c^2 < 0$, $\rho_\mu \gtreqless 0$ implique d'après l'équation (1.5) que $cov\left\{\partial u/\partial c, y_e\right\} \lesseqgtr 0$.

Or, la théorie économique ne définit pas de relation directe entre l'utilité marginale de la consommation ($\partial u/\partial c$) et la productivité marginale du capital humain (y_e). On ne connaît donc pas le signe de $cov\left\{\partial u/\partial c, y_e\right\}$ a priori.

Par contre, on sait que :

$$\begin{aligned} sign\ \frac{\partial var\left\{y\left(e,\mu\right)\right\}}{\partial e} &= sign\ E\left\{\frac{\partial}{\partial e}\left[y\left(e,\mu\right) - E\left\{y\left(e,\mu\right)\right\}\right]^2\right\} \\ &= sign\ 2cov\left\{y\left(e,\mu\right), y_e\left(e,\mu\right)\right\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

L'effet d'un investissement additionnel en éducation sur la variance des gains est du même signe que la covariance entre les gains moyens et marginaux. Cette différence entre les taux de rendement moyens et marginaux, à cause de l'incertitude, joue un rôle central dans l'analyse[9]. Si cette corrélation est positive, alors la variance des gains croît avec le niveau de scolarité. Dans ce cas, un individu averse au risque, se protégera en réduisant son investissement en capital humain. Une corrélation négative entre les rendements moyens et marginaux a l'effet opposé : un accroissement du niveau de scolarité réduira la variance des gains futurs. Dans ce cas, l'investissement en capital humain est encouragé lorsque le risque augmente.

Par ailleurs sachant que le signe de $cov\left\{y\left(e,\mu\right), y_e\left(e,\mu\right)\right\}$ est le même que celui de $cov\left\{\partial u/\partial c, y_e\right\}$, d'après l'hypothèse d'utilité marginale décroissante de la consommation avec le revenu, on en déduit que ρ_μ est du même signe que $cov\left\{y\left(e,\mu\right), y_e\left(e,\mu\right)\right\}$ et que $\partial var\left\{y\left(e,\mu\right)\right\}/\partial e$. On peut alors déduire directement le comportement de l'individu à partir de la condition d'optimalité (1.5). En effet, si à l'optimum le rendement marginal espéré du capital humain est supérieur à celui du capital financier, cela indique que l'individu perçoit le capital humain comme étant plus risqué que le

[9]Selon Levhari et Weiss (1974), cette corrélation peut être testée empiriquement de deux manières :
- De manière directe (mais partielle) en montrant une relation de complémentarité entre aptitude et niveau de scolarité. Le but étant de voir si un accroissement de l'aptitude génère des gains plus élevés pour les plus hauts niveaux de scolarité.
- De manière indirecte, on peut montrer qu'une corrélation positive entre les taux de rendements moyens et marginaux existe, si et seulement si, la variance des gains s'accroît avec le niveau d'investissement en capital humain.

capital physique. Dans ce cas, l'individu est incité à réduire son investissement en capital humain :

$$\begin{aligned} E\{\rho\} &> (1+r) \Longrightarrow \rho_{\mu} > 0 \Longleftrightarrow cov\{\partial u/\partial c, y_e\} < 0 \\ &\Longrightarrow cov\{y(e,\mu), y_e(e,\mu)\} > 0 \Longrightarrow \partial var\{y(e,\mu)\}/\partial e > 0 \end{aligned}$$

Pour Levhari et Weiss (1974) l'hypothèse généralement retenue dans la littérature empirique est celle d'un risque croissant (variance croissante des gains), ce qui conduit à supposer un niveau d'éducation plus faible en situation d'incertitude. Low et Ormistom (1991) estiment une équation stochastique de gains à partir des données américaines du *National Longitudinal Survey* (NLS) et montrent que l'allongement de la durée de scolarité augmente la variance des salaires, aussi bien pour les hommes que pour les femmes[10]. Plus récemment, Chen (2008) a obtenu des résultats similaires, en comparant la variabilité des salaires associée aux individus diplômés du supérieur (four-year college graduate) à celle des sortants du lycée (high school graduate). A partir de l'estimation d'une équation de gains *à la* Mincer augmentée d'un effet fixe individuel, lui permettant de contrôler l'hétérogénéité non observée, Chen (2008) identifie le risque associé à un niveau de scolarité par les composantes transitoire et permanente de la variance des salaires, conditionnelle au niveau de scolarité, aux caractéristiques individuelles et à l'aptitude scolaire. Pour Chen, l'augmentation du risque avec le niveau de scolarité s'explique en partie par la variabilité des coûts[11]

[10]Un autres aspect particulièrement intéressant de l'analyse de Low et Ormistom, est de pouvoir identifier séparément l'impact du capital humain général et du capital humain spécifique sur la variance des salaires. Ils montrent que le capital humain spécifique, mesuré par l'expérience professionnelle, réduit le risque pour les hommes, alors que pour les femmes, l'expérience professionnelle en début de vie active accroît la dispersion des salaires. Cette différence observée entre les profils de salaires des jeunes hommes et des jeunes femmes est généralement expliquée par une probabilité d'interruption de l'activité professionnelle plus grande pour les femmes (liée à la maternité notamment). L'embauche des jeunes femmes peut ainsi apparaître plus risquée aux yeux des employeurs.

[11]L'essentiel du coût direct engendré par la poursuite d'étude est causé par la distance qui sépare les lieux d'habitation des individus et les établissements scolaires et qui génère des frais de transport, de logement, *etc.* plus élevés en moyenne mais aussi beaucoup plus hétérogène entre les individus.

engendrés par la poursuite des études dans l'enseignement supérieur, et permet d'expliquer pourquoi certains élèves ayant de bonnes capacités scolaires ne poursuivent pas dans le supérieur.

Cependant, Kodde (1986) a apporté des résultats empiriques sur des données en coupe (données néerlandaises) qui contredisent la prédiction de Levhari et Weiss (1974) et qui indiquent au contraire l'existence d'une relation positive entre incertitude et investissement en capital humain. Généralement, les estimations de fonction de gains sur données en coupe ne permettent pas de contrôler l'hétérogénéité non observée, ni l'hétéroscédasticité, et par conséquent ne permettent pas d'expliquer la variabilité des gains. Cependant Kodde (1986) dispose de données sur la perception qu'ont les individus du risque sur les salaires, lui permettant ainsi de mesurer directement l'effet du risque sur la demande d'éducation. Il montre que le risque sur les salaires accroît fortement la probabilité de poursuite d'étude. De même, en introduisant la possibilité d'emprunter pendant la durée des études à l'université, Olson, White et Shefrin (1979) ont montré[12] que la variabilité des gains futurs baissait avec le niveau de scolarité.

Pour tenter de rendre compte de ces constats empiriques, Snow et Warren (1990) ont développé une extension du modèle fondateur de Levhari et Weiss (1974) en endogénéisant l'offre de travail.

1.3. Effets de l'incertitude dans un modèle à deux périodes avec offre de travail endogène

Snow et Warren (1990) présentent un modèle d'accumulation du capital humain sous incertitude avec offre de travail endogène. Dans ce modèle, l'hypothèse d'une relation positive entre l'investissement en capital humain et le taux de salaire futur est conservée ($y_e > 0$). Comme dans le cadre précédent, l'individu est supposé maximiser son utilité espérée sur l'ensemble de son cycle de vie, en contrôlant sa consommation

[12] Sur les données du *National Longitudinal Survey of Work Experience of Young Men.*

présente et son investissement en capital humain. La grande différence avec le modèle précédent, et plus généralement avec les modèles de maximisation du revenu, est qu'ici l'utilité de l'individu dépend non seulement de la consommation mais aussi du temps de loisir. Cela permet de rendre compte du caractère contraignant du travail et de la satisfaction qu'apporte le temps libre à l'individu. L'utilité est exprimée de la façon suivante :

$$u\left(I_0, I\right), \tag{1.8}$$

Où $I_0 \equiv c_0 + y_0 l_0$ désigne la consommation réelle de la première période, c'est-à-dire la consommation de biens c_0 augmentée de la valeur du loisir $y_0 l_0$, c'est-à-dire du temps de loisir l_0, pondéré par le revenu de la première période y_0.

$I \equiv c + y(e, \mu)l$ désigne la consommation réelle future, qui correspond à la somme de la consommation future (c) et de la valeur future du loisir (yl).

A partir de la contrainte de budget intertemporelle :

$$c_0 + y_0\left(l_0 + e\right) + \frac{c}{1+r} + \frac{y(e,\mu)l}{1+r} = A + y_0 + \frac{y}{1+r} \tag{1.9}$$

On peut réécrire I sous la forme :

$$I(I_0, e, y) \equiv \left[A + y_0\left(1-e\right) - I_0\right]\left(1+r\right) + y\left(e,\mu\right) \tag{1.10}$$

Le programme à résoudre par le consommateur peut alors être défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\max_{I_0, e} V = E\left[u(I_0, I)\right] \\ &\qquad sc : c + yl(y, I) = \left[A + y_0\left(1-e\right) - I_0\right]\left(1+r\right) + y\left(e,\mu\right) \end{aligned} \tag{1.11}$$

La première condition d'optimalité $V_{I_0} = 0$ est semblable à la condition (1.4a) de la section précédente puisque à l'optimum, le taux marginal de substitution intertemporel, doit être égal au facteur d'escompte :

$$\frac{\partial V}{\partial_{I_0}} = E\left\{\frac{\partial u}{\partial_{I_0}} - \left(1+r\right)\frac{\partial u}{\partial_I}\right\} = 0 \tag{1.12}$$

La seconde condition de maximisation de (1.11) est :

$$\frac{\partial V}{\partial e} = E\left\{\frac{\partial u}{\partial_I} y_0 \left[\rho - (1+r)\right]\right\} = 0 \tag{1.13}$$

Où

$$\rho = \frac{y_e\left(e^*, \mu\right) h(y)}{y_0} \tag{1.14}$$

est le rendement marginal de l'éducation, qui dépend non seulement de la productivité marginale de l'éducation $y_e\left(e^*, \mu\right)$ et donc du niveau d'investissement en capital humain comme chez Levhari et Weiss (1974), mais aussi de l'offre de travail future $h(y)$[13]. L'offre de travail postscolaire détermine donc la proportion du rendement potentiel qui sera réalisé sur le marché du travail.

La relation entre le risque et l'investissement en capital humain est établie à partir du signe ρ_μ , défini par :

$$\rho_\mu = \frac{\left(h_y y_e y_\mu + h y_{e\mu}\right)}{y_0} \tag{1.15}$$

Comme Levhari et Weiss (1974), Snow et Warren (1990) montrent qu'à l'optimum, le rendement espéré du capital humain est plus élevé (plus faible) que celui d'un actif financier supposé certain si l'investissement additionnel en capital humain accroît (réduit) le rendement marginal du capital humain[14]. Autrement dit,

$$E\left\{\rho\right\} \gtreqless 1 + r \quad \text{si, et seulement si} \quad \rho_\mu \gtreqless 0. \tag{1.16}$$

Levhari et Weiss (1974) concluent que l'investissement en capital humain est plus faible en situation d'incertitude qu'en l'absence de risque si $\rho_\mu \geqslant 0$. Cette conclusion

---

[13]L'offre de travail est la proportion du temps de l'individu qui n'est pas consacrée au loisir, une fois entré sur le marché du travail. D'où $h\left(y\right) = 1 - l\left(y, I\right)$.

[14]Sachant que $E[(\rho-(1+r)]u_I = cov(\rho, u_I) + E[(\rho-(1+r)]Eu_I = 0$ d'après la condition d'optimalité (1.14), $E[(\rho-(1+r)]$ est du signe de $cov(\rho, u_I)$. Or $cov(\rho, u_I) = \rho_\mu u_{I\mu}$. Puisque $u_{I\mu} = y_\mu\left(u_{II} - u_I l_I\right)$ est négatif d'après les hypothèses d'aversion au risque et de normalité du loisir, le signe de $cov(\rho, u_I)$ est opposé à celui de ρ_μ. Cela confirme la proposition de Levhari et Weiss (1974) à savoir, le signe de ρ_μ détermine le signe de $E\left[\rho - (1+r)\right]$.

est déduite de l'hypothèse d'exogénéité de l'offre de travail qui implique que le rendement est indépendant de l'arbitrage entre travail et loisir. Or, quand l'offre de travail est une variable de choix et donc lorsqu'elle influence la valeur du rendement, aucune inférence sur la relation entre le risque et l'investissement en capital humain ne peut être établie à partir du seul signe de la covariance entre les rendements moyens et marginaux. Une variation de l'investissement en capital humain affecte l'offre de travail et donc le rendement marginal du capital humain car elle modifie les revenus futurs et le prix implicite du loisir. Il en résulte que même si l'offre de travail est parfaitement inélastique avec les salaires ($h_y = 0$) comme chez Levhari et Weiss, le signe de ρ_μ ne permet pas de déduire le comportement optimal de l'individu, car l'investissement en capital humain est influencé par un effet revenu. En effet, l'accroissement du risque réduit le revenu réel d'un individu averse au risque, ce qui se traduit par une réduction du rendement marginal du capital humain :

$$\rho_I = -\frac{y_e l_I}{y_0} \tag{1.17}$$

Le problème dès lors, est de savoir si cet effet revenu est suffisant ou non pour changer l'effet global du risque sur le niveau d'investissement en capital humain. On montre alors avec Snow et Warren (1990), que cela dépend de la nature de l'investissement en capital humain qui est donnée par le signe de[15] :

$$\frac{de}{dI} = \frac{u_{I_0 I_0}}{H} y_0[((1+r) - \rho)Eu_{II}) - \rho_I Eu_I] \tag{1.18}$$

Si l'investissement en capital humain est *inférieur*, c'est-à-dire si l'investissement baisse lorsque le revenu de l'individu augmente, alors l'investissement décroît lorsque le risque augmente. Par contre, si l'investissement est *normal*, alors l'effet du risque est indéterminé. L'explication de ces résultats est la suivante : un accroissement du risque réduit le revenu réel, de sorte qu'un individu ayant une aversion pour le risque décroissante avec le revenu est moins disposé à supporter le risque. De ce fait, si l'on suppose que l'accroissement de l'investissement en capital humain accroît le risque

[15]La démonstration est fournie dans l'annexe A1.

sur le taux de salaire futur, l'exposition au risque est neutralisée par la réduction de l'investissement. Par ailleurs, une augmentation du risque réduit la consommation présente et donc accroît le revenu futur espéré ce qui influence l'investissement en capital humain par un effet croisé qui est négatif si l'investissement est *inférieur*. Cependant, lorsque l'investissement en capital humain est *normal*, l'effet croisé est positif et donc l'investissement peut augmenter ou baisser avec le risque.

La critique de Snow et Warren adressée à Levhari et Weiss est de nature semblable à celle adressée aux modèles initiaux de Becker (1964) et Ben-Porath (1967) dans lesquels les effets revenus sont absents. Ell porte sur l'hypothèse que l'individu maximise la valeur présente de ses gains sur le cycle de vie sans prendre en compte la structure temporelle de la consommation, puisque celle-ci s'ajuste à travers le marché des capitaux. Or, cette propriété de séparation n'est plus obligatoirement valide lorsque l'offre de travail est endogène ou lorsque l'investissement en capital humain est risqué. Ces deux contradictions vis à vis du théorème de la séparation proviennent de l'existence d'un effet marginal du revenu sur l'investissement en capital humain.

Le papier de Snow et Warren (1990) constitue un apport fondamental à l'analyse des effets de l'incertitude, dans la mesure où il généralise les différents résultats antérieurs dans un cadre beaucoup plus complet. En effet, la prise en compte de l'endogénéité de l'offre de travail permet de mettre en évidence les mécanismes indirects par lesquels transitent les effets de l'incertitude. Cependant, comme dans la plupart des autres analyses théoriques, Snow et Warren ne parviennent pas à exhiber de manière explicite les conditions d'une relation positive entre incertitude et investissement en capital humain. Généralement, l'incertitude sur les gains futurs conduit à une réduction de l'investissement. Tout au plus, sous certaines conditions, l'effet de l'incertitude est indéterminé.

A l'issue de ces modélisations, l'interprétation a priori de la relation entre investissement en capital humain et risque reste ambiguë. L'hypothèse provisoire que nous faisons est que cette ambiguïté provient de la forme agrégée de l'incertitude qui, à travers un paramètre aléatoire unique, capture l'effet de toutes les sources d'incertitude. Or, on peut penser que l'incertitude portant sur la capacité d'apprentissage des individus, et plus généralement sur le processus d'accumulation de capital humain et celle existant sur le marché du travail (déclassement salarial, chômage...) sont de nature différente et qu'elles peuvent exercer un effet contrasté, sinon contradictoire, sur l'investissement en capital humain.

Par ailleurs, dans ces modèles, l'horizon de planification de l'individu est réduit à deux périodes, ce qui ne permet pas de mettre en évidence le caractère intertemporel de l'investissement en capital humain. Cette absence de dynamique réduit l'analyse sous-jacente du comportement individuel à un cas particulier du cycle de vie, ce qui limite la portée théorique de ce type de modèles.

Dans la section suivante, nous présentons un modèle de programmation dynamique en temps continu qui permet à la fois d'étudier le comportement de l'individu sur l'ensemble de son cycle de vie, mais aussi de décomposer et d'identifier séparément l'effet des différentes sources d'incertitude.

1.4. Incertitude et dynamique de l'investissement en capital humain sur le cycle de vie

Afin de faciliter l'exposé et la discussion du seul modèle, à notre connaissance, qui explique l'accumulation de capital humain sur le cycle de vie dans un cadre stochastique, nous commençons par rappeler les techniques permettant de traiter les problèmes dynamique en économie ainsi que leur généralisation à un cadre stochastique.

D'une manière générale, il existe principalement deux méthodes pour traiter un problème d'optimisation dynamique en économie[16] : le calcul des variations, qui nécessite la différenciabilité des fonctions qui entrent dans le problème, et le contrôle

[16] L'optimisation dynamique intègre la dimension temporelle dans l'étude d'un phénomène. En économie, elle permet de traiter un processus de décision qui engage l'individu dans le temps. A la

optimal, qui sur le plan technique, permet le traitement de certaines caractéristiques comme les solutions en coin ou les discontinuités des trajectoires[17]. Cette dernière méthode, comme son nom l'indique, est centrée sur une ou plusieurs variables de contrôle qui servent d'instrument à l'optimisation. A la différence du calcul des variations dont le but est de définir le sentier optimal d'une variable d'état, la théorie du contrôle optimal a pour objet principal la détermination du sentier temporel optimal de la variable de contrôle et d'en déduire ensuite la trajectoire optimale de la variable de stock correspondante. Cette méthode s'avère bien adaptée aux problèmes auxquels est confronté l'économiste, en particulier celui de l'absence de données ou d'observation des variables qu'il étudie. Par exemple, l'économiste de l'éducation s'intéresse au capital humain des individus qui est par définition non observable. Pour l'approcher, il utilise le niveau de scolarité, de même que l'aptitude est approximée par d'autres variables observée (le score à certain test par exemple). L'idée sous-jacente à cette méthode est la suivante. Si l'on parvient à spécifier la relation existant[18] entre le capital humain non observable et un ensemble d'instruments, alors on peut retrouver la trajectoire optimale du capital humain à partir de celle des variables de contrôle, tout en tenant compte d'éventuelles périodes d'interruption (de la scolarité par exemple). Cette méthode permet en outre de montrer les arbitrages qui existent entre le présent et le futur. Dans le modèle de capital humain ces arbitrages sont exprimés par le signe des dérivées partielles de la fonction de gains. La dérivée partielle est positive par rapport au stock de capital humain et négative par rapport à l'investissement en capital humain. Cela traduit le fait que l'individu, lorsqu'il s'engage dans une activité de formation, renonce à un gain immédiat pour espérer l'accroître dans le futur. Ces techniques semblent donc adaptées au problème d'accumulation de capital humain sur le cycle de vie.

---

différence d'un modèle statique qui donne pour solution une valeur optimale, la résolution d'un modèle d'optimisation dynamique conduit à la définition d'une trajectoire temporelle optimale pour les variables.

[17]Cette présentation manque singulièrement de rigueur. Nous renvoyons le lecteur à Chiang (1992) pour un développement complet et rigoureux de ces méthodes.

[18]Cette relation est appelée *équation de mouvement* du modèle dynamique. Dans le cas d'espèce, elle définit la contrainte d'accumulation du capital humain.

Cependant, l'introduction d'un élément d'incertitude ne nous permet pas de poser le problème habituel de contrôle optimal. Celui-ci doit être inséré dans un contexte probabiliste[19]. Les relations entre les variables sont alors exprimées par l'intermédiaire des covariances et des corrélations. Elles permettent en particulier, de définir les lois de rentabilité des différentes activités, financières et non financières, considérées comme des vecteurs aléatoires. La notion d'espérance conditionnelle permet d'intégrer l'acquisition de l'information par les agents au fil du temps et de formaliser la modification des probabilités qu'ils affectent aux événements suite à la réception de ces informations.

La théorie des processus stochastiques intègre la dimension temporelle dans l'analyse des phénomènes aléatoires. Elle permet de formaliser l'évolution d'un système dynamique lorsque celle-ci ne peut être prévue avec certitude à partir de l'état initial du système et d'une équation d'évolution. Plus particulièrement, le passage de l'optimisation dynamique dans le cas certain à l'optimisation stochastique a été fait par Itô dans les années quarante, en définissant une nouvelle espèce d'intégrale, l'intégrale stochastique, qui permet de décrire la dynamique d'un processus temporel stochastique, en l'occurrence d'une variable d'état (qui peut être un vecteur aléatoire), sous la forme d'une équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$dX(t) = \mu_X(X(t), t)\,dt + \sigma_X(X(t), t)\,dZ(t)$$

Où $X(t)$ est un processus de diffusion d'Itô[20]. La partie $\mu_X(X(t), t)$ est appelé "drift" (ou "terme de tendance"). Elle correspond à la moyenne instantanée par unité de temps du processus aléatoire. La partie $\sigma_X(X(t), t)$ est appelé "volatilitée ou

[19]Nous rappelons avec Roger (1991) que le contexte probabiliste est un moyen commode pour représenter un phénomène économique, même déterministe, beaucoup trop complexe à décrire de manière satisfaisante. La théorie des probabilités apporte de ce point de vue des réponses satisfaisantes à un grand nombre de problèmes économiques.

[20]On appelle processus de diffusion tout processus markovien à trajectoire continues. On appelle processus de diffusion d'Itô, tout processus de diffusion $X(t)$ tel qu'il existe deux fonctions μ et σ (dépendant de l'état du processus et du temps) définis par :

$\mu(x,t) = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{E[X(t+h)-X(t)/X(t)=x]}{h}$

$\sigma^2(x,t) = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{Var[X(t+h)-X(t)/X(t)=x]}{h}$

μ et σ sont appelés paramètres infinitésimaux du processus $X(t)$.

"coefficient de diffusion" et correspond à l'écart type instantané par unité de temps du processus. $Z(t)$ est le processus de Wiener standard, qui se caractérise par des paramètres $\mu(X(t), t) = 0$ et $\sigma(X(t), t) = 1$ pour tout t.

Le lemme d'Itô, appelé aussi théorème fondamental du calcul stochastique, est l'outil essentiel du calcul stochastique. Il permet de déterminer les paramètres de tout processus d'Itô lorsque celui-ci dépend d'un processus $X(t)$ de même nature dont on connaît les paramètres[21]. De ce point de vue, le lemme d'Itô est très utile, puisqu'en pratique on est souvent amené à transformer des variables aléatoires par des fonctions régulières, pour passer notamment d'une rentabilité à un stock. On utilise généralement la fonction log, car contrairement à la loi normale, elle n'a pas d'axe de symétrie et ne peut donc pas prendre de valeurs négatives, ce qui est le cas de la plupart des variables économiques. Pour cette raison, les processus d'Itô sont relativement bien adaptés à la description des prix, des quantités et des rentabilités. Parmi les processus d'Itô, le processus de Wiener, appelé aussi mouvement brownien, est sans doute le processus stochastique le plus utilisé dans toutes les sciences, pour les mêmes raisons que la loi normale l'est en statistique. Lorsqu'un phénomène aléatoire quelconque résulte de l'addition d'un grand nombre de causes indépendantes, sa mesure suivra une loi normale du fait du théorème central-limite. C'est le cas par exemple lorsqu'on suppose la normalité des rendements d'un actif ; en introduisant la dimension temporelle, le rendement sera supposé suivre un processus de Wiener.

Toutefois, la continuité des trajectoires de ces processus limite parfois leur adéquation avec les dynamiques observées en finance dans les périodes d'agitation forte où l'on constate de fortes variations dans des temps très courts, cf. Roger (1991). Ceci a justifié le développement en finance d'autres processus beaucoup plus complexes. Or, il est important de souligner que les processus d'Itô restent relativement bien adaptés à la description des variables que nous étudions, puisque le marché du travail et le système éducatif sont beaucoup moins volatiles que les marchés financiers.

[21] Le lemme d'Itô est présenté dans l'annexe B.1 puisqu'il est fondamental pour la résolution du modèle de la section suivante.

En l'occurrence, les crises existent mais elles s'étalent sur des durées beaucoup plus longues, de sorte que les périodes d'extrême volatilité sont négligeables.

La difficulté essentielle du problème de contrôle optimal stochastique réside dans l'interdépendance des résultats des décisions prises à différents instants du temps. C'est pourquoi, les économistes ont pris l'habitude de spécifier les préférences individuelles par des fonctions d'utilité additivement séparables dans le temps. Cela implique que les décisions optimales ne dépendent que des valeurs courantes des variables. Cette hypothèse restrictive est toutefois maintenue, car sans elle, les calculs seraient tout simplement inextricables[22]. Dans le cadre des processus aléatoires, c'est la même raison qui a conduit les économistes à spécifier des modèles où l'ensemble d'information est de faible dimension. L'hypothèse là encore la plus courante est que seules les valeurs courantes servent à prédire les valeurs futures des variables. On dit alors d'une telle variable qu'elle suit un processus de Markov. Les processus d'Itô, et donc les processus de Wiener, sont des processus de Markov. Cela signifie en d'autres termes, que les choix des individus sont faits uniquement sur la base des informations dont ils disposent au moment où ils prennent leurs décisions. Ceci permet, sur le plan technique, de faire l'hypothèse d'indépendance des accroissements du processus. Dans le cas d'un rendement supposé suivre un processus de Wiener, cette hypothèse implique que la loi de probabilité du rendement est indépendante des rentabilités antérieures, ou, ce qui est équivalent, que toute l'information contenue dans le processus à la période courante est indépendante de la trajectoire suivie par le processus. C'est pourquoi on qualifie souvent les processus markoviens de processus sans mémoire.

Enfin, on suppose généralement la stationnarité des accroissements temporels du processus, car sinon la variance du processus serait infinie et donc impossible à estimer. L'ensemble des hypothèses relatives à ces processus stochastiques sont exposées en détail dans Roger (1991) et Kamien et Schwartz (1991).

[22]Cf. Kreps (1996), annexe 2, pour plus de détails.

Ces principes généraux rappelés, nous présentons dans cette section le modèle de Williams (1979) qui fournit un cadre d'analyse très général de la relation entre le risque et l'investissement en capital humain[23]. En effet, Williams développe un modèle de programmation dynamique en temps continu qui permet d'étudier le processus d'accumulation de capital humain sur l'ensemble du cycle de vie des individus dans un cadre stochastique. En outre, l'offre de travail est supposée endogène et différentes sources d'incertitude, concernant à la fois le processus d'éducation et de salaire sont explicitement prises en comptes. Plus précisément, quatre sources d'incertitudes sont distinguées. Une première source d'incertitude porte sur la valeur des actifs financiers dans lesquels peut investir l'individu sur le marché des capitaux. Deux autres sources proviennent directement du processus d'accumulation de capital humain : l'une porte sur l'efficacité de l'apprentissage scolaire, et l'autre porte sur le taux de dépréciation du capital humain. La dernière source d'incertitude porte sur le niveau de salaire par qualification. Les covariances entre les différentes variables risquées jouent un rôle central dans l'analyse, en particulier dans la détermination de l'effet global du risque sur l'investissement en capital humain.

L'incertitude intervient dans les contraintes d'accumulation de capital humain et de richesse financière. C'est pourquoi, la première étape consiste à dériver correctement les versions stochastiques de ces équations d'accumulation.

Dans ce modèle, le stock de capital humain courant $k(t)$ est défini comme étant le revenu du travail maximal auquel l'individu peut prétendre sur le marché du travail. $e(t)$ mesure la proportion du temps que l'individu consacre à la formation durant la période t. $l(t)$ désigne la proportion du temps allouée au loisir à la période t. $(1-e(t)-l(t))$ est par conséquent la proportion du temps restante allouée au travail. Le stock de capital humain à la période $t+\Delta t$ est exprimé par la relation suivante :

$$k\left(t+\Delta t\right)=\frac{\omega\left(t+\Delta t\right)}{\omega\left(t\right)}\left[1-\delta\left(t+\Delta t\right)+\theta\left(t+\Delta t\right)e\left(t\right)\right]k\left(t\right) \tag{1.19}$$

[23]Dans le développement qui suit, nous présentons uniquement les principaux résultats de Williams (1979). La résolution de ce type de modèle, ainsi que toutes les démonstrations sont exposées dans le chapitre suivant.

Le stock de capital humain de la période $t + \Delta t$ est égal au stock de la période précédente $k(t)$ auquel s'ajoute le capital humain nouvellement produit au début de la période $t + \Delta t$: $\theta(t + \Delta t) e(t) k(t)$. On doit également soustraire la dépréciation du stock de capital humain durant la période t égale à $\delta(t + \Delta t) k(t)$. Cette somme est ajustée de façon à prendre en compte toute les variations imprévues des salaires ω.

L'incertitude porte sur les paramètres $\theta(t + \Delta t)$, $\delta(t + \Delta t)$, et $\omega(t + \Delta t)$.

Le paramètre stochastique $\theta(t + \Delta t)$ représente l'incertitude portant sur la véritable aptitude scolaire de l'individu. Il prend en compte également tous les inputs non identifiables entrant dans le processus d'éducation. Le paramètre aléatoire $\delta(t + \Delta t)$ représente le taux de dépréciation inconnu du capital humain à chaque période. Le paramètre aléatoire $\omega(t + \Delta t)$ est le taux de salaire futur par niveau d'éducation. Chacun des trois paramètres aléatoires est supposé être infiniment divisible et suivre une loi log normale de moyenne μ et de variance σ : $\theta(t + \Delta t) \sim LN(\mu_\theta, \sigma_\theta)$; $\delta(t + \Delta t) \sim LN(\mu_\delta, \sigma_\delta)$; et $\omega(t + \Delta t) \sim LN(\mu_\omega, \sigma_\omega)$.

En introduisant la dimension temporelle, les variations de chacun des paramètres aléatoires sont supposées suivre, d'après le lemme d'Itô, un processus de Wiener se caractérisant par les différentielles stochastique suivantes :

$$\Delta\theta(t) = \mu_\theta \Delta t + \sigma_\theta \Delta Z(t) \tag{1.20}$$

$$\Delta\delta(t) = \mu_\delta \Delta t + \sigma_\delta \Delta Z(t) \tag{1.21}$$

$$\Delta\omega(t) = \omega(t) \left[\mu_\omega \Delta t + \sigma_\omega \Delta Z(t)\right] \tag{1.22}$$

μ_θ, μ_δ,et μ_ω représentent les moyennes instantanées des processus stochastiques respectifs. Ces paramètres sont constants, d'après les propriétés du processus de Wiener. $\sigma_\theta, \sigma_\delta$, et σ_ω sont des vecteurs de constantes de dimension $N + 3$. $Z(t)$ est le processus de Wiener standard. Par définition, c'est un vecteur aléatoire de moyenne nulle, de covariances nulles et de variance Δt. Il est également de dimension $N + 3$.

A partir de ces trois expressions, en faisant tendre Δt vers 0, en remplaçant ces valeurs dans (1.19) et en appliquant le lemme d'Itô, on obtient l'écriture stochastique de l'équation d'accumulation de capital humain en temps continu :

$$\frac{dk\left(t\right)}{k\left(t\right)} = \left(\mu_{\omega} + \mu_{\theta} e\left(t\right) - \mu_{\delta}\right) dt + \left(\sigma_{\omega} + \sigma_{\theta} e\left(t\right) - \sigma_{\delta}\right)' dZ\left(t\right) \tag{1.23}$$

Cette équation établit que le capital humain suit un processus de diffusion qui dépend linéairement du temps consacré à l'éducation. Plus précisément, les incréments dans l'allocation courante en éducation $e(t)$ augmentent simultanément la moyenne et la variance du taux de croissance instantané du capital humain et donc des gains futurs sur le cycle de vie.

On notera à partir de cette équation, que l'ampleur de cet effet de l'éducation dépend crucialement du paramètre de productivité nette θ. C'est en effet le seul paramètre qui affecte directement l'investissement en capital humain. On notera également que le profil de l'investissement en capital humain et celui des gains qui en découlent sur le cycle de vie sont affectés différemment selon les sources d'incertitude. En particulier, les incréments dans ω et dans δ exercent un effet contraire sur la moyenne et la variance du taux de croissance du capital humain et des gains.

Simultanément, l'individu est supposé répartir sa richesse financière courante entre trois éléments : des dépenses de consommation, un investissement dans un actif non risqué et un investissement dans les N actifs risqués sur le marché financier. L'actif sans risque est supposé rapporter un taux d'intérêt connu et fixé à r. Les rendements des actifs financiers risqués sont supposés suivre un processus de Wiener dont la différentielle stochastique s'écrit :

$$dP\left(t\right) = P\left(t\right)\left[\mu dt + \Gamma' dZ(t)\right] \tag{1.24}$$

Où μ est le vecteur des rendements moyens par unité de temps et $\Sigma \equiv \Gamma'\Gamma$ est la matrice des variances-covariances du rendement des N actifs risqués par unité de temps, de dimension $(N+3) \times N$. De plus, les rendements des N actifs risqués exhibent les covariances $\Sigma_{\omega} \equiv \Gamma'\sigma_{\omega}$ avec les ajustements de salaires par niveau de scolarité, ainsi que les covariances $\Sigma_\theta \equiv \Gamma'\sigma_\theta$ et $\Sigma_\delta \equiv \Gamma'\sigma_\delta$ avec les paramètres de productivité nette et de dépréciation du capital humain. Pour simplifier les calculs, Williams pose ces covariances égales à 0, ce qui revient à supposer l'indépendance du marché financier, c'est-à-dire, que les ajustements de salaires, de la productivité nette et de dépréciation des compétences productives sont déterminés indépendamment des forces exercées par le marché financier.

En notant X la proportion de la richesse investie en actifs risqués, $c(t)$ le flux de consommation à l'instant t, et $y(t)$ le flux de revenu du travail perçu en t, la variation de la richesse financière entre t et Δt, lorsque Δt tend vers 0, peut s'écrire :

$$dw\left(t\right) = \frac{wX'dP\left(t\right)}{P\left(t\right)} + r\left(1-X\right)w\left(t\right)dt + y\left(t\right)dt - c\left(t\right)dt$$

En remplaçant $dP\left(t\right)$ par sa valeur donnée par (1.24) et en arrangeant les termes, on obtient la contrainte stochastique d'accumulation de la richesse financière :

$$dw\left(t\right) = \left[\left(rw(t) + y\left(t\right) - c\left(t\right)\right) + w\left(t\right)\left(\mu - r1\right)'X\right]dt + w\left(t\right)X'\Gamma'dZ\left(t\right) \qquad (1.25)$$

Les équations (1.23) et (1.25) constituent les contraintes sous lesquelles l'individu est supposé maximiser sur l'ensemble de son cycle de vie sa fonction d'utilité séparable dans le temps, qui dépend de la consommation, du loisir, du capital humain[24] et de la richesse terminale[25]. Plus précisément, le programme à résoudre est posé de la façon suivante :

$$Max\ E_t \int_t^T u\left[c\left(t\right), l\left(t\right), k\left(t\right), t\right]\Delta t + B\left[w\left(T\right), T\right] \qquad (1.26)$$

sous les contraintes[26] :

[24]L'intégration du capital humain dans la fonction d'utilité n'est pas fondamental dans l'analyse. Elle permet néanmoins de prendre en compte les gains non monétaires du capital humain, de la même façon que le loisir apporte une certaine satisfaction à l'individu.

[25]Lorsque l'horizon de planification de l'individu n'est pas infini, on peut ajouter au problème une fonction d'héritage (bequest fonction) de la forme $B\left[w\left(T\right), T\right]$.

[26]Dans tout le développement qui suit, nous remplaçons respectivement $c\left(t\right), l\left(t\right), k\left(t\right), w\left(t\right)$, et $e\left(t\right)$, par c, l, k, w, e, de façon à alléger les écritures.

$$\begin{aligned}
\frac{dk}{k} &= \left(\mu_h + \mu_\omega + \left(\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}\right)e - \mu_\delta - \sigma_{h\delta} - \sigma_{\delta\omega} + \sigma_{h\omega}\right)dt \\
&\quad + \left(\sigma_h + \sigma_\omega + \sigma_\theta e\left(t\right) - \sigma_\delta\right)' dZ\left(t\right) && (1.27) \\
dw &= \left[rw + \left(1 - e - l\right)k - c + w\left(\mu - r1\right)' X\right]dt + wX'\Gamma' dZ\left(t\right) && (1.28) \\
\text{et } c &\geqslant 0,\ 0 \leqslant e, l \leqslant 1 && (1.29)
\end{aligned}$$

A partir de ce programme stochastique initial, le principe d'optimalité de Bellman et l'utilisation des techniques particulières du calcul stochastique, en l'occurrence le lemme d'Itô, permet d'écrire l'*équation aux dérivées partielles stochastiques* (EDPs) suivante :

$$\begin{aligned}
0 \equiv\ & Max\ \{u\left[c, l, k, t\right] + V_k k\left(\mu_h + \mu_\omega + \left(\mu_\theta + \sigma_{h\theta} + \sigma_{\theta\omega}\right)e - \mu_\delta - \sigma_{\delta h} - \sigma_{\delta\omega} + \sigma_{h\omega}\right) \\
& + V_w\left[rw + \left(1 - e - l\right)k - c + w\left(\mu - r1\right)' X\right] \\
& + \frac{1}{2}V_{kk}k^2\left(\sigma_h^2 + \sigma_\omega^2 + \sigma_\theta^2 e^2 + \sigma_\delta^2 + 2\sigma_{h\theta}e + 2\sigma_{\theta\omega}e - 2\sigma_{\theta\delta}e + 2\sigma_{h\omega} - 2\sigma_{h\delta} - 2\sigma_{\delta\omega}\right) \\
& + \frac{1}{2}V_{ww}w^2 X'\Sigma X + V_{kw}kw\Sigma_\omega' X + V_t\} \qquad (1.30)
\end{aligned}$$

Les solutions intérieures pour cette équation sont obtenues de manière classique, en posant chacune des dérivées partielles égales à zéro[27]. On obtient alors les conditions d'optimalité qui définissent implicitement les quatre solutions $c^*\left(t\right)$, $l^*\left(t\right)$, $wX^*\left(t\right)$, et $e^*\left(t\right)$. Nous nous intéressons ici uniquement à l'effet du risque sur l'investissement optimal en capital humain. Nous n'exposons pas les autres solutions du modèle. Celles-ci sont reportées et commentées dans le chapitre suivant.

$$e(t) = \left(-\frac{V_k}{V_{kk}k}\right)\frac{\mu_\theta - \frac{V_w}{V_k}}{\sigma_\theta^2} + \frac{\sigma_{\theta\delta}}{\sigma_\theta^2} \qquad (1.31)$$

[27]Les indices désignent là encore les dérivées partielles par rapport aux variables.

L'investissement optimal en éducation est affecté directement par les paramètres associés au risque inhérent à l'accumulation de capital humain. Les individus allouent leur temps dans les activités de formation en fonction de leurs préférences vis-à-vis du risque et du jugement qu'ils portent sur la réalisation des évènements futurs. On remarque en effet, que l'investissement en capital humain dépend crucialement de l'indice d'aversion relative au risque d'Arrow-Pratt $-\frac{V_{kk}k}{V_k}$. En particulier, toute augmentation de l'aversion au risque se traduit par une réduction de l'investissement en capital humain.

Le temps alloué à la formation dépend également de la perception qu'ont les individus du risque associé à l'éducation, représenté par l'ensemble des variances et covariances instantanées. Il dépend directement du risque associé à l'efficacité de l'apprentissage, mesuré par la variance du produit marginal de l'éducation σ_θ^2. Par contre, le risque portant sur la dépréciation des compétences existantes intervient indirectement par l'intermédiaire de la covariance $\sigma_{\theta\delta}$, qui est supposée négative chez Williams.

Pour mesurer l'impact d'une variation de ces deux types de risque, il est nécessaire de spécifier plus en détail les préférences de l'individu, puisque le signe de ces deux effets dépend fondamentalement de la valeur du paramètre d'aversion au risque. Or, cet indice est construit à partir de la fonction d'utilité indirecte V et absorbe de ce fait l'effet de tous les paramètres du modèle sur la structure temporelle des valeurs optimales. Sans restrictions supplémentaires sur les préférences individuelles il n'est pas possible d'obtenir des solutions explicites pour l'équation (1.30) ni d'évaluer l'impact sur le cycle de vie des variations des paramètres du modèle.

Williams spécifie les préférences individuelles par une fonction d'utilité instantanée de type CARA (Constant Absolut Risk Aversion) de la forme suivante[28] :

$$u\left[c(t), l(t), k(t), t\right] = \alpha(t)\left[c(t) - \mathbf{c}(t)\right]^{\gamma}\left[l(t)\, k(t)\right]^{\lambda} \tag{1.32}$$

Avec $\alpha(t), c(t), \mathbf{c}(t), l(t), k(t) \geqslant 0$ et $\gamma + \lambda < 1$

[28] Cette structure est similaire à celle de Heckman (1976) dans le cadre d'un modèle sans incertitude.

$\mathbf{c}(t)$ représente le niveau de consommation minimal indispensable pour l'individu.

$l(t)\,k(t)$ désigne le loisir effectif (*cf.* Heckman (1976)).

$\alpha(t)$ est le facteur d'escompte. Il est tel que le taux de préférence pour le présent $-\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} \geqslant 0$

La fonction d'héritage B devient dans ce cas :

$$B[w(T), T] = \alpha(t)[w(t) - \mathbf{w}(t)]^{\gamma+\lambda} \tag{1.33}$$

$w(t) - \mathbf{w}(t)$ constitue la richesse financière effective de l'individu. Il correspond à la différence entre la richesse courante $w(t)$ et le niveau de richesse minimal $\mathbf{w}(t)$ nécessaire pour satisfaire le niveau de consommation minimal $\mathbf{c}(t)$. Plus précisément, $\mathbf{w}(t)$ correspond à la somme actualisée de la consommation minimale et de la richesse terminale minimale :

$$\mathbf{w}(t) \equiv \int_t^T c(\tau)\, e^{-r(\tau-t)} d\tau + \mathbf{w}(T)\, e^{-r(T-t)} \tag{1.34}$$

A partir de (1.32) et (1.33), il est possible de trouver des solutions explictes approchées au problème initial (1.26). En particulier l'investissement optimal en capital humain est donné par :

$$e^*(t) \simeq \frac{\mu_\theta - 1/\eta}{(1-\gamma-\lambda)\,\sigma_\theta^2}\left[1 + \frac{w - \mathbf{w}}{\eta k}\right] + \frac{\sigma_{\theta\delta}}{\sigma_\theta^2} \tag{1.35}$$

Cette expression indique que tout incrément dans l'indice d'aversion relative au risque $(1-\gamma-\lambda)$, dans le risque portant sur le produit marginal de l'éducation (σ_θ^2), et dans le risque sur la dépréciation du capital humain $(\sigma_{\delta\theta})$ réduit l'investissement optimal en capital humain. Le modèle de Williams prédit sans ambiguïté une baisse de l'investissement en éducation lorsque le risque augmente. Altonji (1993) a montré que le risque d'échec scolaire était un élément fondamental pour comprendre le comportement des étudiants dans l'enseignement supérieur. Le coût d'opportunité lié à la poursuite d'étude dans le supérieur, et le comportement qui en découle, est fortement influencé par la confrontation des capacités scolaires des individus et des anticipations sur les capacités scolaires requises dans les différentes filières de formation. L'acquisition de nouvelles informations, en particulier défavorables, peut conduire les étudiants engagés dans un cursus universitaire à réviser leur choix et sortir du système éducatif. Altonji montre que ce type de comportement face au risque d'échec explique en grande partie les abandons scolaires fréquemment observé en premier cycle universitaire et les non linéarités observées dans les rendements associés aux années passées à l'université.

On notera que les résultats théoriques de Williams (1979) reposent fondamentalement sur l'hypothèse d'indépendance entre certaines variables aléatoires. En imposant la nullité de la covariance entre l'aptitude individuelle et les salaires (par niveau d'éducation), Williams fait peser toute l'incertitude sur le processus d'acquisition des connaissances. Dès le départ, le paramètre de risque relatif au salaire disparait de l'équation d'accumulation stochastique de capital humain et par conséquent ne se retrouve pas dans l'expression du niveau optimal d'investissement. Dans le chapitre suivant, nous relâchons cette hypothèse d'indépendance et nous obtenons des résultats qui contrastent avec ceux de Williams (1979). Nous montrons que les paramètres de risque relatifs au marché du travail ont un effet sur la décision d'investir en capital humain et que cet effet est positif. Nous concluons que l'effet du risque sur l'investissement en capital humain dépend de la nature et du poids accordé aux différentes sources d'incertitude.

D'autres travaux théoriques qui s'inscrivent dans un cadre différent de celui proposé par Williams (1979) apportent des résultats différents. Nous les présentons dans la section suivante.

1.5. Choix de scolarité, investissement irréversible et incertitude

Dans cette section, nous présentons une approche alternative permettant de traiter la question de l'investissement en capital humain dans un cadre dynamique et stochastique. Elle repose sur l'application des techniques issues de la théorie des options réelles au problème d'éducation. Il s'agit de la transposition au cas incertain d'un modèle de choix de scolarité. La grande différence avec le modèle de portefeuille de la section précédente, est qu'ici le choix d'éducation est considéré comme une variable binaire : investir ou ne pas investir.

Fan (1993), Dotan et Williams (1981), Hogan et Walker (2007) développent un modèle de scolarité, dans lequel l'individu doit décider d'une date d'arrêt optimale et définitive des études. L'éducation est considérée ici comme un investissement irréversible[29]. Le problème de l'individu peut être posé dans les termes suivants : lorsqu'il est dans le système éducatif, l'individu possède en quelque sorte une option, celle de quitter l'école à chaque date, et d'entrer sur le marché du travail à un taux de salaire qui dépend stochastiquement du temps passé à l'école. Une fois que cette option est exercée, l'individu ne peut plus retourner dans le système éducatif, et il percevra sur l'ensemble de son cycle de vie un revenu qui dépend uniquement de la scolarité accumulée. En présence de risque, l'individu est incité à différer dans le temps sa sortie du système scolaire à cause de l'irréversibilité de son choix. En effet, en restant à l'école, l'individu a l'option de sortir à la période suivante dans le but de tirer avantage d'un "meilleur tirage" dans la distribution des rendements. Il a également le choix de rester à l'école dans l'attente d'une meilleure information. L'incertitude accroît de ce fait le bénéfice potentiel de l'option. Mais si l'individu n'exerce pas son option, suite à une anticipation d'un salaire faible, la perte de valeur de l'option reste inchangée. Cette asymétrie des effets de l'incertitude sur la valeur de l'option incite l'individu à

[29]Les versions stochastiques du problème d'arrêt optimal sont analysées dans Kamien et Schwartz (1991). L'application de ces techniques à l'investissement en capital physique est passée en revue dans Dixit (1993) et Dixit et Pindick (1994).

reporter sa sortie du système scolaire, d'autant plus longtemps que l'incertitude sur les salaires est forte[30]. Pour Fan (1993), l'intérêt de différer leur sortie du système éducatif en présence d'incertitude provient du fait que pendant la période de scolarité, les individus peuvent rechercher un emploi correspondant à leurs attentes de façon plus efficace que lorsqu'ils sont déjà en situation d'emploi. Au fur et à mesure que l'individu augmente son niveau de scolarité, il a en moyenne plus de chances de trouver un emploi correspondant à son salaire de réservation (supposé constant).

Plus précisément, dans ce modèle, le salaire offert qui est fonction du niveau de scolarité, est supposé suivre un mouvement brownien de moyenne μ et de variance σ^2. Le drift $\mu > 0$ indique que le salaire individuel augmente avec le niveau de scolarité. Le risque sur le salaire auquel fait face l'individu est capturé par le processus de Wiener, dont la différentielle stochastique s'écrit :

$$dw\,(t) = \mu dt + \sigma dZ(t) \tag{1.36}$$

Fan (1993) suppose que les individus sont neutres vis à vis du risque[31] et ont un horizon de vie infini. Dans ce cadre, les individus sont supposés maximiser leur utilité espérée qui dépend positivement de l'éducation (s) et de la valeur de la consommation (c), supposée constante dans le temps. Formellement, l'individu maximise :

$$EV(s) = E\left[\left(\int_0^s ce^{-rt}dt + \int_s^\infty w(s)e^{-rt}dt\right) \mid w(o)\right] \tag{1.37}$$

r désigne le taux d'escompte, $w(o)$ est le salaire initial que perçoit l'individu s'il n'entre pas dans le système éducatif, le premier terme de la parenthèse représente la valeur de la consommation escomptée de s années de scolarité, et enfin le second terme mesure la valeur espérée du revenu futur escompté sur l'ensemble de la vie active de l'individu.

[30] La démonstration est donnée dans l'annexe du papier de Hogan et Walker (2007).

[31] Hogan et Walker (2007) prennent en compte l'aversion au risque des individus et obtiennent des résultats similaires à Fan (1993) concernant l'effet du risque sur la durée de scolarité.

Pour résoudre ce problème sous incertitude, l'individu doit décider d'une date de sortie optimale du système éducatif, définie par :

$$t^* = \min_s [s \geqslant 0 \mid w(s) \geqslant w^*] \tag{1.38}$$

w^* est le salaire de réservation de l'individu, supposé constant dans le temps.

Ce critère de sélection établit que l'individu poursuit sa scolarité tant qu'elle génère un salaire futur supérieur à son salaire de réservation. Au moment où les flux de revenus tendent à s'égaliser, l'individu a intérêt à arrêter ses études et entrer sur le marché du travail. Au delà de cette date, toute poursuite d'étude devient sous-optimale (le gain marginal devient inférieur au coût d'opportunité).

La résolution de l'équation (1.37) détermine la valeur présente espérée de la scolarité conditionnellement à w^*

$$R(w^*) = \frac{c}{r} + \frac{1}{r}\left(E\left[w\left(t^*\right) \mid w(0), w^*\right] - c\right) E\left(e^{-rt^*} \mid w(0), w^*\right) \tag{1.39}$$

En supposant que le salaire initial est inférieur au salaire de réservation ($w(0) \leqslant w^*$) et que $E\left[w\left(t^*\right) \mid w(0), w^*\right] = w^*$ (le taux de salaire suivant un processus stochastique continu, seule la date optimale de sortie est aléatoire), on peut réécrire (1.39) :

$$R(w^*) = \frac{c}{r} + \frac{1}{r}\left(w^* - c\right) E\left(e^{-rt^*} \mid w(0), w^*\right) \tag{1.40}$$

En utilisant le résultat de Capozza et Helsley (1990), Fan (1993) montre que :

$$E\left(e^{-rt^*} \mid w(0), w^*\right) = e^{-\alpha[w^* - w(0)]} \qquad \text{avec } \alpha = \frac{\left(\mu^2 + 2\sigma^2 r\right)^{\frac{1}{2}} - \mu}{\sigma^2} \tag{1.41}$$

D'où (1.40) devient

$$R(w^*) = \frac{c}{r} + \frac{1}{r}\left(w^* - c\right) e^{-\alpha[w^* - w(0)]} \tag{1.42}$$

La maximisation de $R(w^*)$ par rapport à w^* donne la valeur du salaire de réservation d'équilibre :

$$w^* = c + \frac{1}{\alpha} = c + \frac{(\mu^2 + 2\sigma^2 r)^{\frac{1}{2}} + \mu}{2r} \tag{1.43}$$

Le salaire de réservation d'équilibre augmente avec le degré d'incertitude puisque

$$\frac{\partial w^*}{\sigma^2} = -\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\sigma^2} > 0 \tag{1.44}$$

Cela conduit l'individu à reporter sa sortie du système éducatif dans l'espoir de bénéficier d'une meilleure information sur les opportunités d'emploi futures, puisque d'après (1.42) la valeur espérée de l'éducation augmente avec le salaire de réservation.

Ainsi, dans ces modèles, la durée de scolarité est une fonction croissante non seulement du rendement espéré mais aussi du risque associé à l'éducation. Ces résultats théoriques, conformes à l'intuition, sont en accord avec certaines situations observées en France, par exemple, l'allongement des durées de scolarité dans un contexte marqué par des difficultés accrues d'insertion des jeunes. Ce modèle fournit apporte une réponse théorique au phénomène de poursuite d'étude, en mettant en avant le rôle protecteur de l'éducation face aux risques existants à l'entrée du marché du travail. Belzil et Hansen (2004), s'inscrivent exactement dans ce cadre théorique et estiment un modèle structurel de programmation dynamique des choix d'éducation. Ils identifient séparément un risque sur les salaires et un risque sur le taux d'emploi futur et obtiennent des résultats confirmant les prédictions théoriques, à savoir que l'augmentation de la scolarité réduit considérablement le risque associé à l'emploi et au salaire. Il est important de rappeler que la variabilité des revenus du travail peut provenir des salaires mais également des variations de l'offre de travail (travail à temps partiel, chômage...), en particulier sur les marchés du travail européens. Stewart et Swaffield (1999) ont notamment montré sur données britanniques que l'éducation réduisait sensiblement la probabilité pour un travailleur d'obtenir un emploi peu rémunéré, mais réduisait aussi la probabilité de devenir non employé. Des résultats similaires sont obtenus par Nickell et Bell (1997) pour plusieurs pays. En particulier, ils montrent que les travailleurs les plus éduqués connaissent généralement des périodes de chômage plus courtes que les travailleurs les moins éduqués. Enfin, il est souvent mis en avant que les individus ayant les niveaux de scolarité les plus élevés accèdent davantage à la formation continue dans leur emploi futur. Celle-ci réduit l'instabilité de l'emploi car elle génère du capital humain spécifique qui limite la rotation de la main d'oeuvre.

Néanmoins, les résultats de ce type de modèles méritent d'être nuancés, au regard des hypothèses sur lesquelles ils reposent. Tout d'abord, ces modèles d'option peuvent être perçus comme un cas particulier du modèle de capital humain. Il s'agit en effet de modèles de *scolarité*, dans lesquels l'offre de travail est supposée exogène. Cela signifie que l'individu contrôle uniquement la durée de sa scolarité. De ce fait, toute formation endogène sur le marché du travail est impossible. Durant la période d'emploi, les salaires sont supposés croître à un taux exogène, identique pour tous les travailleurs. Ainsi, les différentiels de salaires moyens observés sur le cycle de vie des individus s'expliquent uniquement à partir des différences initiales de niveaux de scolarité. Toute possibilité de changer sa situation initiale par de la formation postscolaire est exclue. Dans ces circonstances, la question de l'investissement sur le cycle de vie perd de son intérêt, puisque la situation future de l'individu est fixée dès la sortie du système scolaire. Par ailleurs, les éléments de contexte français nous conduisent à nuancer l'hypothèse que toute la formation est acquise à l'intérieur du système scolaire. Face aux difficultés récurrentes d'insertion des jeunes, les pouvoirs publics mettent régulièrement en place des dispositifs d'aide à l'insertion dont le contenu en formation ne peut être négligé. C'est d'ailleurs en grande partie sur ce critère qu'ils sont évalués (Werquin, 1997). Plus généralement, la formation tout au long de la vie est un enjeu capital d'adaptation des compétences et d'augmentation des revenus pour les individus mais également pour les économies. Au delà du seul cas français, les pays de l'OCDE ont adopté en 1994 *les stratégies de l'OCDE pour l'emploi* et se sont notamment accordés sur la huitième recommandation qui vise à "améliorer les qualifications et les compétences de la main-d'oeuvre en modifiant profondément les systèmes d'enseignement de formation". Les différents rapports de l'OCDE établissent que les politiques qui encourageraient la formation continue des adultes peuvent fortement contribuer à la croissance économique (OCDE, 1999) et soulignent que la croissance repose sur l'amélioration de la productivité de la main-d'oeuvre dans son ensemble, ce qui suppose un investissement équitable dans l'accès à la formation de la population (OCDE, 2005). Bien que la formation tout au long de la vie ne soit pas la règle et que de fortes disparités existent entre les pays, entre les entreprises et les individus, la formation postscolaire a vocation à se développer davantage dans les années à venir.

Par ailleurs, la valeur d'option de l'éducation dans les différents modèles dépend fondamentalement des préférences vis-à-vis de l'éducation. En particulier, les résultats du modèle de Hogan et Walker (2007) reposent sur l'hypothèse d'une utilité positive de l'éducation. D'une part, les coûts et les bénéfices non monétaires de l'éducation expliquent sans doute qu'une faible part du coût d'opportunité de l'éducation. D'autre part, l'hypothèse que les bénéfices non monétaires sont en moyenne supérieurs aux coûts non monétaires est difficilement compatible avec les nombreuses observations de rendements élevés de l'éducation pour les niveaux de scolarité les plus élévés. On devrait s'attendre à l'inverse, c'est-à-dire à une compensation monétaire plus faible pour les individus ayant un bénéfice non monétaire de l'éducation plus élévé (Judd, 2000). Par ailleurs, Cunha, Heckman et Navarro (2005), Carneiro, Hansen et Heckman (2003), ont montré que les coûts psychologiques expliquent une large part des abandons scolaires (ou des sorties du système éducatif après le lycée). Dans le cadre du modèle de Hogan et Walker (2007) l'existence d'une désutilité de l'éducation fait disparaître la valeur d'option de l'éducation.

Enfin, les sources d'incertitude ne sont pas distinguées dans le modèle. Les déterminants du processus d'accumulation de capital humain n'étant pas spécifiés, toute l'incertitude est supposée provenir du marché du travail via les salaires. Le contenu risqué de l'apprentissage scolaire est ici totalement absent. Pourtant, nous avons vu que celui pouvait être important. Or, intégrer l'incertitude sur la réussite scolaire rend très difficile la résolution analytique des modèles d'option. Le problème de fond mis en évidence par Dotan et Williams (1981), c'est que l'option de poursuite d'étude n'a de valeur que si l'éducation est irréversible. En effet, tout échec scolaire se traduit par une sortie définitive du système éducatif, ce qui annule la valeur d'option de l'éducation. En définitive, l'incertitude est purement exogène. Toute forme d'incertitude endogène générée par les choix éducatifs des individus semblent interdites par ce type de modèle. A notre connaissance, aucun modèle d'option n'a tenté d'intégrer l'incertitude portant sur l'éducation elle-même.

Or, s'il existe du risque à l'intérieur du processus d'éducation, celui-ci doit être pris en compte. C'est la voie empruntée par Williams (1979) à partir d'un cadre théorique différent mais plus général. C'est celui que nous avons choisit de suivre dans le chapitre suivant.

1.6. Conclusion

Ce travail part d'une critique adressée au modèle standard de capital humain, qui ne parvient plus à rendre compte d'un certain nombre de réalités observées dans la plupart des pays développés. L'existence, à des degrés divers selon les pays et selon les conjonctures économiques, de phénomènes de chômage et de déclassement, particulièrement marqués pour les jeunes depuis plusieurs années, ne permet plus de fonder les décisions en matière de politiques éducatives sur la base d'un modèle supposant que les individus connaissent parfaitement le futur lorsqu'ils prennent leurs décisions en matière de formation. Pour tenter de dépasser cette critique, nous avons présenté une synthèse des principaux travaux théoriques, qui situent l'analyse de la demande d'éducation dans un cadre d'incertitude. A la question des effets de l'incertitude sur l'investissement dans l'éducation et la formation, les modèles à deux périodes, où l'incertitude est prise en compte sous une forme agrégée, ne parviennent pas à fournir une réponse claire, y compris lorsque l'offre de travail est supposée endogène. Les modèles dynamiques apportent des conclusions tranchées mais contradictoires. Ce n'est donc pas la prise en compte explicite du caractère dynamique de l'investissement en éducation qui permet de définir un effet du risque sans ambiguïté. Il faut sans doute s'intéresser davantage à la nature des sources d'incertitudes étudiées. Lorsque l'incertitude repose essentiellement sur le processus d'accumulation des connaissances (Williams, 1979), elle décourage l'investissement en éducation. Par contre, lorsqu'elle est supposée provenir exclusivement du marché du travail (Fan, 1993, Hogan et Walker, 2007), l'individu est incité à accroître sa période d'éducation. Il semble donc que les différentes sources d'incertitude agissent de manière contradictoire sur la décision d'investir en éducation. D'ailleurs, au plan empirique, les estimations des effets du risque sur l'investissement en capital humain donnent des résultats tout aussi contrastés et semblent aller dans le sens de l'hypothèse défendue dans ce travail. Les travaux d'Altonji (1993) ou Chen (2008), qui insistent davantage sur les risques qui surviennent pendant le déroulement du parcours scolaire, montrent que l'investissement en éducation peut être découragé lorsque le risque augmente. A l'inverse, les résultats de Belzil et Hansen (2004), entre autre, qui traitent exclusivement des risques relatifs au marché du travail, mettent en évidence un effet positif du risque sur la demande d'éducation. La nature des sources de l'incertitude semble jouer un rôle déterminant dans les décisions d'investissement, aussi bien au plan théorique qu'empirique. Cette hypothèse que nous formulons ici et que nous intégrons au chapitre suivant s'inscrit dans la voie recommandée par Campbell (1996) : "ultimately, a satisfying model of risk and return must explain the magnitudes of the rewards that investors receive for bearing different kinds of risk".

Dans le chapitre qui suit, nous allons étudier la relation éducation-risque à partir d'un modèle théorique le plus complet possible qui intègre plusieurs sources d'incertitude, les comportements d'offre de travail et l'ensemble du cycle de vie de l'individu.

CHAPITRE 2

Investissement dans le capital humain et risques : l'éducation comme actif risqué

Résumé

Dans ce chapitre, nous analysons le processus d'accumulation de capital humain sur le cycle de vie des individus sous l'hypothèse d'incertitude. Pour cela, nous développons un modèle de programmation dynamique en temps continu dans lequel plusieurs sources d'incertitude sont prises en compte, concernant à la fois le processus d'accumulation du capital humain et le marché du travail. Nous commençons par définir la structure optimale de l'investissement en capital humain dans un cadre complètement général, du point de vue des préférences individuelles et des processus stochastiques. Puis, nous spécifions les préférences des individus, afin d'obtenir des solutions explicites et de pouvoir fournir une étude précise de l'impact de chaque source d'incertitude sur l'investissement dans le capital humain. Pour éclairer l'importance du caractère intertemporel des décisions individuelles, nous intégrons au modèle un vecteur général de variables d'état puis nous étudions les effets d'une variable exogène particulière : le taux de chômage. Nous montrons que l'effet global des différents risques est négatif, sauf s'il est compensé par une prime de risque suffisamment forte.

2.1. Introduction

Le modèle de capital humain a été construit dans un cadre complètement certain. Si l'on admet qu'il est de plus en plus difficile, voire impossible, pour un élève de connaître parfaitement l'évolution de sa carrière professionnelle au moment où il prend ses décisions d'éducation, alors le modèle de capital humain standard doit être étendu à l'analyse des comportements face au risque, pour rester un guide utile à notre compréhension de la réalité observée. Le bilan établit dans le chapitre précédent ne permet pas de tirer de conclusions précises quant à l'effet du risque sur l'investissement dans le capital humain. Les modèles statiques fournissent des prédictions théoriques différentes des modèles dynamiques. A l'intérieur de chaque génération de modèle, les prédictions diffèrent selon que l'offre de travail est exogène ou non. Notre analyse fait apparaître néanmoins une caractéristique commune à tous les types de modèles. Derrière le terme générique de risque employé dans la littérature, il ressort que les risques spécifiques à l'éducation exercent toujours un impact négatif sur l'investissement dans le capital humain. A l'inverse, les risques purement issus du marché du travail ont un impact positif sur la demande d'éducation. L'hypothèse provisoire que nous pouvons formuler est que le risque agrégé sur le rendement futur de l'éducation résulte de facteurs de nature différents qui renvoient à des stratégies individuelles envers le risque différentes. Pour comprendre ces stratégies, nous proposons un cadre d'analyse homogène qui intègre les différentes limites soulevées dans le chapitre précédent. Plus précisément, nous construisons, à partir du modèle fondateur de Williams (1979), un modèle de programmation dynamique en temps continu permettant d'étudier l'effet de différentes sources d'incertitude sur les décisions d'investissement dans le capital humain.

Williams (1979) propose un modèle de portefeuille qui généralise le modèle initial de capital, dans lequel l'individu arbitre entre des activités non risquées, au cas d'un arbitrage entre activités risquées. Le modèle étudie les choix individuels d'investissement dans capital humain sur l'ensemble du cycle de vie, dans un cadre où l'offre de travail est endogène et dans lequel différentes sources d'incertitude, concernant à la fois le processus d'acquisition de capital humain, les salaires associés au capital humain sur le marché du travail et l'incertitude sur le marché financier. L'intérêt majeur de prendre en compte différentes sources d'incertitude est de montrer comment les covariances entre les différentes variables risquées jouent un rôle central dans la détermination de l'effet global du risque sur l'investissement en capital humain. Williams (1979) conclut à un effet négatif du risque : les individus sont amenés à réduire leur investissement dans le capital humain lorsque le risque associé à l'éducation augmente.

Nous montrons dans ce chapitre que ce résultat provient de l'hypothèse (ad hoc) d'indépendance des différents marchés. En forçant la nullité de certaines covariances, en particulier celles reliant les risques relatifs au processus d'acquisition des connaissances au risque sur les salaires, Williams fait peser implicitement tout le poids de l'incertitude sur le processus d'apprentissage et élimine de l'analyse le risque sur les salaires. Or, cette hypothèse est difficilement soutenable, dans la mesure où l'un des objectifs premiers de l'économie de l'éducation est précisément d'étudier l'articulation entre le déroulement de la scolarité et sa valorisation sur le marché du travail (Willis et Rosen, 1979). Les caractéristiques individuelles observables et non observables expliquant les différences de niveaux d'éducation, expliquent en partie aussi les différences de salaires (Willis, 1986, Grilliches, 1977).

Dans l'extension du modèle de Williams (1979) que nous proposons dans ce chapitre, nous levons l'hypothèse d'indépendance entre les variables aléatoires décrivant le processus d'acquisition des connaissances et celles relatives au marché du travail. En outre, nous déterminons la structure optimale de l'investissement en capital humain à partir de processus de diffusion complètement généraux. L'une des principales contributions de notre modèle est la place centrale accordée à la dimension intertemporelle des processus stochastiques et ses conséquences sur les comportements individuels. En effet, pendant longtemps la dimension intertemporelle a joué un rôle mineur en économie car les variables agrégées étaient supposées stationnaires. Depuis, une large littérature a été développée, en finance essentiellement, pour montrer que les drifts et les volatilités des processus stochastiques changeaient dans le temps, et que dans une certaine mesure ils étaient prédictibles, car affectés par des variables d'état. Aujourd'hui, on sait que la dimension intertemporelle produit un gain ou une perte du bien être qui doit être pris en compte dans le processus de décision des individus. Or, le modèle de Williams (1979) suppose des mouvements browniens géométriques. La constance des paramètres de ce type de processus interdit la prise en compte dans les choix individuels d'une couverture intertemporelle contre les risques[1]. Dans ce travail, nous nous intéressons à la couverture intertemporelle car elle renvoie à de nombreuses réalités observées dans le domaine de l'éducation. De nombreux étudiants poursuivent des études qui ne sont pas immédiatement valorisées sur le marché du travail, trouvent *in fine* rapidement un emploi stable. Les plus qualifiés peuvent accepter de commencer à travailler dans un emploi peu rémunéré pour atteindre plus rapidement le marché de l'emploi stable. D'autres, au contraire, peuvent préférer une période de chômage plutôt que de cumuler plusieurs emplois mal rémunérés, dans le but d'accéder directement mais plus tard à un emploi correspondant à leur niveau d'éducation. Quelles que soient les stratégies individuelles face aux difficultés sur le marché du travail, il semble que l'éducation, indirectement, puisse en partie agir sur les facteurs de variabilité du rendement futur du capital humain. Dans le modèle proposé nous centrons l'étude de la relation entre l'investissement dans le capital humain et un facteur particulier de variabilité des gains : le taux de chômage futur. Pour l'instant, à notre connaissance, ni Williams (1979) ni personne d'autre n'a tenté de prendre en considération ce type de relations dans un modèle de capital humain.

Le chapitre est composé de la façon suivante. La section 2.2 est dédiée à la présentation du modèle. Dans la section 2.3, nous présentons les résultats du modèle dans le cas général, du point de vue des processus stochastiques et des préférences individuelles. Dans la section 2.4, après avoir explicité les préférences individuelles, nous discutons en détail l'effet des différentes sources d'incertitude sur l'investissement optimal en capital humain. La section 2.5 conclut ce travail.

[1]Dans le temps, le processus de diffusion reste toujours à sa valeur moyenne, de sorte qu'il n'y a pas de risque à couvrir lié au temps.

2.2. Spécification du modèle

L'hypothèse de départ commune à tout modèle de capital humain est qu'un individu peut améliorer sa situation future sur le marché du travail en consacrant du temps à la formation. Ce temps correspond à un investissement, puisqu'il est supposé accroître les compétences productives de l'individu, qui seront valorisées plus tard sur le marché du travail. Cependant, un tel investissement est couteux, dans la mesure où durant le temps alloué à l'éducation, l'individu renonce au salaire qu'il aurait perçu en travaillant immédiatement. Cet arbitrage entre salaire immédiat et salaire futur plus élevé est central dans le modèle de capital humain. La théorie standard considère que la grille des salaires présents et futurs est parfaitement connue des individus lorsqu'ils prennent leurs décisions d'éducation. Partant de l'hypothèse que les individus ne peuvent pas connaître parfaitement le futur, nous essayons dans ce chapitre de comprendre comment se construit l'arbitrage entre un salaire immédiat certain et des salaires futurs supposés incertains. C'est pourquoi, dans cette section, nous construisons un modèle dynamique et stochastique d'accumulation de capital humain sur le cycle de vie.

Nous supposons que l'incertitude provient de quatre sources de la même manière que Williams (1979). L'incertitude intervient dans les contraintes d'accumulation de capital humain et de richesse financière. La première étape de ce travail consiste donc à dériver correctement les versions stochastiques de ces équations d'accumulation.

Dans le modèle, la partie du temps que l'individu consacre à l'éducation durant une période t est mesuré par $\lambda(t)$. C'est l'investissement dans le capital humain. $l(t)$ désigne la proportion du temps alloué aux activités de loisir durant la période t. Ainsi, $(1 - \lambda(t) - l(t))$ est la proportion du temps restante allouée au travail.

Le stock de capital humain futur[2] $K(t + \Delta t)$ est égal au stock courant $K(t)$ auquel doit être ajouté le stock de capital humain nouvellement créé durant la période t : $\theta(t, t + \Delta t)\lambda(t)k(t)$. Cette production de capital humain est supposée dépendre

[2] pour la période $t + \Delta t$.

linéairement de la proportion du temps allouée à l'éducation $\lambda(t)$ et d'un paramètre $\theta(t, t+\Delta t)$ qui mesure l'efficacité de l'éducation. A ce stock brut de capital humain, il est nécessaire de soustraire le stock de capital humain qui s'est déprécié durant la période t, qui est égal à $\delta(t, t+\Delta t)k(t)$, où $\delta(t, t+\Delta t)$ mesure le taux de dépréciation courant du capital humain. Le volume net de capital humain futur s'écrit donc :

$$K(t+\Delta t) = K(t) + \theta(t, t+\Delta t)\lambda(t)K(t) - \delta(t, t+\Delta t)K(t) \qquad (2.1)$$

En multipliant chacun des membres de l'équation ci-dessus par "ω", le prix de marché du capital humain, on obtient la valeur monétaire du stock de capital humain sur le marché du travail :

$$\omega(t+\Delta t)K(t+\Delta t) = \omega(t+\Delta t)\left[1 + \theta(t, t+\Delta t)\lambda(t) - \delta(t, t+\Delta t)\right]K(t) \qquad (2.2)$$

En posant $k(t+\Delta t) = \omega(t+\Delta t)K(t+\Delta t)$, la valeur du stock de capital humain futur peut être réécrite de la façon suivante :

$$k(t+\Delta t) = \frac{\omega(t+\Delta t)}{\omega(t)}\left[1 - \delta(t, t+\Delta t) + \theta(t, t+\Delta t)\lambda(t)\right]k(t) \qquad (2.3)$$

Ecrite sous cette forme, cette équation indique que la valeur du stock de capital humain à la période $t+\Delta t$, dépend non seulement des variations du volume de capital humain, exprimées par le terme entre crochets, mais il dépend aussi des variations entre les dates t et $t+\Delta t$ de la valeur sur le marché du travail ω du stock de capital humain, exprimé par $\frac{\omega(t+\Delta t)}{\omega(t)}$[3].

Dans ce modèle, $k(t)$ and $k(t+\Delta t)$ peuvent donc être définis respectivement comme les revenus courants et futurs maximum que l'individu peut espérer percevoir sur le marché du travail. Pour bien mettre en évidence l'enjeu de l'éducation dans le

[3]Notons que sous cette forme, $\frac{\Delta\omega(t)}{\omega(t)}$ mesure le taux de rendement sur le marché du travail d'une unité supplémentaire de capital humain accumulé.

modèle de capital humain, il est important de se rappeler que l'individu ne consacre pas tout son temps au travail. Il consacre également du temps à l'éducation et au loisir. Ainsi le revenu courant du travail est définit par :

$$y(t) = (1 - \lambda(t) - l(t))k(t) \tag{2.4}$$

La combinaison des équations (2.3) et (2.4) exprime l'arbitrage au cœur du modèle de capital humain entre l'éducation et le travail : durant la période d'éducation, l'individu renonce à une partie du revenu du travail $\lambda(t)k(t)$ qu'il aurait pu percevoir en travaillant immédiatement (équation 2.4). D'un autre côté, s'éduquer aujourd'hui accroît le revenu futur (équation 2.3) dans une proportion $\frac{\omega(t+\Delta t)}{\omega(t)}\theta\,(t, t+\Delta t)\,\lambda\,(t)\,k\,(t)$. Dans le modèle standard de capital humain cette proportion est supposée parfaitement connue. Dans ce modèle, elle est inconnue. L'incertitude dans le modèle porte en effet sur les paramètres $\theta\,(t, t+\Delta t)$ et $\delta\,(t, t+\Delta t)$, relatifs au processus d'accumulation de capital humain en volume, mais aussi sur le paramètre $\omega\,(t+\Delta t)$, correspondant à la valeur future du capital humain sur le marché du travail.

Plus précisément, à travers le paramètre stochastique $\theta\,(t, t+\Delta t)$ on traduit l'incertitude sur l'efficacité brute de l'investissement dans le capital humain, c'est-à-dire la productivité marginale de l'investissement dans le capital humain. Celle-ci dépend largement de la véritable aptitude cognitive de l'individu (à l'école et au travail), mais également de tous les autres inputs entrant dans le processus d'éducation comme la qualité des écoles, des enseignants, *etc.*, qui ne sont pas maîtrisés par l'individu au moment où il prend ses décisions d'éducation. Le paramètre aléatoire $\delta\,(t, t+\Delta t)$ représente le taux de dépréciation inconnu du capital humain à chaque période. On suppose en effet que le progrès technique rend obsolète certaines compétences individuelles mais dans une proportion inconnue pour l'individu. Enfin le paramètre aléatoire $\omega\,(t+\Delta t)$ correspond au taux de salaire futur associé au stock de capital humain accumulé, inconnu à la date t. On suppose que l'individu observe parfaitement le taux de salaire courant $\omega\,(t)$ correspondant à son niveau de capital humain mais qu'il ne connaît pas la distribution des salaires futurs. Le caractère aléatoire de la distribution des taux de salaires est un moyen de caractériser les tendances futures sur le marché du travail - en particulier les conditions institutionnelles de détermination des salaires - que l'individu ne peut contrôler au moment où il prend ses décisions. Ainsi, deux individus ayant les mêmes caractéristiques et en particulier le même niveau de capital humain, peuvent percevoir des salaires différents dans le futur tout simplement car ils auront obtenu un "tirage" différent dans la distribution des salaires, autrement dit certains individus seront plus chanceux que d'autres. Le fait de prendre en compte l'incertitude permet d'expliquer pourquoi des individus identiques touchent des salaires différents, ce qui est impossible dans le modèle standard de capital humain.

Dans un monde où l'information serait parfaite, ces paramètres seraient constants. En présence d'incertitude ce n'est plus le cas : ils changent. Lorsque l'on introduit la dimension temporelle, les trajectoires de chaque paramètre aléatoire sont décrites, d'après le lemme d'Itô, par des processus de diffusion caractérisés par les différentielles stochastiques suivantes :

$$\Delta\theta(t) = \mu_\theta \Delta t + \sigma_\theta \Delta Z(t) \tag{2.5}$$

$$\Delta\delta(t) = \mu_\delta \Delta t + \sigma_\delta \Delta Z(t) \tag{2.6}$$

$$\frac{\Delta\omega(t)}{\omega(t)} = \mu_\omega \Delta t + \sigma_\omega \Delta Z(t) \tag{2.7}$$

μ_θ, μ_δ et μ_ω représentent les moyennes instantanées de chaque processus stochastique. $\sigma_\theta, \sigma_\delta$ et σ_ω sont des vecteurs de dimension $N+4$[4] qui correspondent aux écart-types instantanés de chaque processus stochastique. Ce sont les indicateurs du risque au sens de Rothschild-Stiglitz[5] puisque leur variation affecte la dispersion des

[4]Car comme nous allons le voir plus bas, $N+4$ est le nombre de processus stochastiques dans le modèle.
[5]" mean-preserving spread".

processus (par définition) mais pas les moyennes. $Z(t)$ est un processus de Wiener standard. Par définition, il s'agit d'un vecteur aléatoire de moyenne nulle, de covariances nulles et de variance Δt. Il est également de dimension $N+4$ dans le modèle.

Si l'on fait tendre Δt vers 0, en remplaçant ces quatre expressions par leur valeur dans l'équation (2.3), on obtient, en appliquant le lemme d'Itô, la version stochastique de l'équation d'accumulation de capital humain en temps continu[6] :

$$\begin{aligned} \frac{dk(t)}{k(t)} &= \left[\mu_\omega + (\mu_\theta + \sigma_{\theta\omega})\lambda(t) - \mu_\delta - \sigma_{\delta\omega}\right] dt \\ &\quad + \left[\sigma_\omega + \sigma_\theta \lambda(t) - \sigma_\delta\right]' dZ(t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Cette équation établit que le taux de croissance instantané de la valeur du capital humain $\frac{dk(t)}{k(t)}$, c'est-à-dire le rendement global du capital humain, suit un processus de diffusion qui combine linéairement le volume et la valeur marchande du capital humain accumulé. Le taux de rendement du capital humain dépend aussi linéairement du temps alloué à l'éducation $\lambda(t)$. Plus précisément, l'investissement dans l'éducation $\lambda(t)$ accroît simultanément la moyenne et la variance du rendement du capital humain. Cette propriété qui découle de la combinaison du modèle de capital humain standard et l'utilisation de processus stochastiques standards a des conséquences fondamentales quant au rôle de l'éducation dans le modèle. D'une part, l'éducation accroît les revenus futurs espérés sur le cycle de vie de manière tout à fait classique. D'autre part, l'éducation accroît la variance du rendement du capital humain. En d'autres termes, lorsqu'un individu investit dans le capital humain, il sacrifie un revenu immédiat certain dans le but de l'accroître dans le futur. Ce faisant, il prend un risque. C'est pourquoi, par abus de langage, nous qualifions l'éducation d'actif risqué, en référence à l'arbitrage rendement / risque qui s'opère en finance. Comme nous allons le voir dans ce chapitre, cette caractéristique à des implications très importantes pour comprendre

[6]Les calculs effectués pour obtenir cette équation sont présentés intégralement dans l'annexe B.2.

la structure de la demande optimale d'éducation et les stratégies individuelles face aux risques qui en découlent.

On notera, à partir de cette équation, que l'ampleur de cet effet de l'éducation dépend crucialement du paramètre de productivité nette θ. Seule l'incertitude portant sur la dépréciation du capital humain n'affecte pas directement l'impact de l'éducation. A la différence de Williams (1979), l'incertitude existant sur le marché du travail influence directement le rendement du capital humain à travers la covariance instantanée $\sigma_{\theta\omega}$. En effet, dans le modèle de Williams (1979), les ajustements qui se produisent sur le marché du travail et dans le système éducatif sont supposés indépendants, ce qui implique la nullité de $\sigma_{\theta\omega}$ et des autres covariances apparaissant dans l'équation (2.8).

L'un des apports de notre travail est précisément de rejeter cette hypothèse d'indépendance et de supposer au contraire l'existence d'une relation non nulle entre les variables relatives au processus d'accumulation de capital humain et celles relatives à la valorisation du capital humain sur le marché du travail. En particulier nous supposons que la covariance $\sigma_{\theta\omega}$, qui identifie la relation entre l'efficacité de l'investissement dans l'éducation et le taux de salaire, est positive. Cela signifie que les individus ayant les plus fortes capacités cognitives (et/ou ceux qui suivent les formations les plus efficaces) obtiennent des salaires plus élevés que les autres. Cette hypothèse très intuitive est aussi conforme aux enseignements que l'on peut tirer de la microéconométrie de l'éducation moderne. Depuis Griliches (1977) jusqu'à Card (2001) la littérature économétrique autour de la question de l'endogénéité de l'éducation et en particulier du fameux "biais d'aptitude" a largement vérifié l'impact positif des caractéristiques non observées comme l'aptitude sur les salaires.

Dans le modèle, on suppose que les individus répartissent leur richesse financière courante $W(t)$ parmi trois éléments : les dépenses de consommation $c(t)$, l'investissement dans l'actif non risqué et l'investissement sur le marché financier dans les N actifs risqués. Si l'on dénote $X(t)$ la proportion de la richesse financière investie dans les actifs risqués, $y(t)$ le flux de revenu du travail perçu à la période t, la richesse financière future accumulée par l'individu peut être réécrite de la manière suivante :

$$W(t+\Delta t) = W(t) + \frac{W(t)\,X'(t)\,\Delta P(t)}{P(t)} + r\,(1 - X(t))\,W(t) - c(t) + y(t) \quad (2.9)$$

Cette équation établit que la richesse financière future est égale à la richesse financière courante augmentée du rendement perçu de l'investissement courant $X(t)$ dans les actif risqués et du taux d'intérêt reçu de la proportion de la richesse courante $1 - X(t)$ investie dans l'actif sans risque. A ce montant doit être ajouté le flux de revenu courant du travail auquel on déduit les dépenses courantes de consommation.

L'actif sans risque est supposé rapporter un taux d'intérêt connu et fixé à r. Le rendement des actifs financiers risqués sont supposés suivre un processus de Wiener dont la différentielle stochastique s'écrit :

$$\frac{\Delta P(t)}{P(t)} = [\mu_s dt + \sigma_s' dZ(t)] \quad (2.10)$$

où μ est le vecteur des rendements moyens par unité de temps et $\Sigma \equiv \sigma_s' \sigma_s$ est la matrice des variances-covariances du rendement des N actifs risqués par unité de temps, de dimension $(N+4)\times N$. De plus, les rendements des N actifs risqués exhibent les covariances $\Sigma_\omega \equiv \sigma_s' \sigma_\omega$ avec les ajustements de rémunération du capital humain, et les covariances $\Sigma_\theta \equiv \sigma_s' \sigma_\theta$ et $\Sigma_\delta \equiv \sigma_s' \sigma_\delta$ avec les paramètres de productivité nette et de dépréciation du capital humain.

En remplaçant $dP(t)$ par sa valeur donné par (2.10) dans l'équation (2.9), les variations de la richesse financière entre les dates t et $t + \Delta t$, lorsque Δt tend vers zéro peut être réécrite comme suit :

$$dW(t) = \left[(rW(t) + y(t) - c(t)) + W(t)\,(\mu - r1)'\,X(t)\right] dt + W(t)\,X'(t)\,\Gamma' dZ(t) \quad (2.11)$$

Les équations (2.8) et (2.11) constituent les contraintes sous lesquelles les individus sont supposés maximiser sur l'ensemble de leur cycle de vie leur fonction d'utilité séparable dans le temps. Celle-ci dépend de la consommation, du loisir et de la richesse terminale[7]. Plus précisément, le programme qui doit être résolu par l'individu est posé de la façon suivante :

$$Max\ E_t \int_t^T e^{-\rho(s-t)} u\left[c\left(s\right), l\left(s\right)\right] ds + e^{-\rho(T-t)} B\left[W\left(T\right), T\right] \tag{2.12}$$

Sous les contraintes[8] :

$$\begin{aligned} \frac{dk}{k} &= \left[\mu_\omega + \left(\mu_\theta + \sigma_\theta' \sigma_\omega\right)\lambda - \mu_\delta - \sigma_\delta' \sigma_\omega\right] dt + \left(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta\right)' dZ \\ dW &= \left[rW + \left(1 - \lambda - l\right)k - c + WX\left(\mu - r\right)\right] dt + WX\sigma_s' dZ \\ \text{et } c &\geqslant 0,\ 0 \leqslant \lambda, l \leqslant 1 \end{aligned}$$

2.3. Investissement optimal dans le capital humain : le cas général

Sur la base de ce programme stochastique initial, le principe d'optimalité de Bellman permet d'écrire les équivalences suivantes :

[7]Lorsque l'horizon de planification de l'individu n'est pas infini, on peut ajouter au problème de maximisation une fonction d'héritage $B[W(T), T]$. Cette fonction permet de mette en évidence une des différences de fond entre le capital financier et le capital humain. En effet, l'individu peut chercher à maximiser sa richesse jusqu'à la fin de sa vie pour la transmettre ensuite à ses héritier. Pour le capital humain, ceci est en grande partie impossible. Bien que le capital humain puisse se transmettre en partie de manière intergénérationnelle, l'individu à intérêt à arrêter son investissement à l'approche de la période de retraite, période à partir de laquelle son investissement n'est plus rentabilisé sur le marché du travail. On déduit de ce raisonnement que l'utilité marginale du capital humain décroît plus vite dans le temps que celle de la richesse financière.

[8]Pour simplifier l'écriture, nous remplaçons dans le reste de l'exposé $c\left(t\right), l\left(t\right), k\left(t\right), w\left(t\right), X(t)$ et $e\left(t\right)$, respectivement par c, l, k, w, X, e.

$$
\begin{aligned}
J(t,W,k,Y) &= e^{-\rho t}V(t,W,k,Y) && (2.13)\\
V[k,W,Y,t,T] &\equiv MaxE_t\int_t^T e^{-\rho(s-t)}u[c(s),l(s)]\Delta s + e^{-\rho(T-t)}B[W(T),T] && (2.14)\\
&\equiv MaxE_t\{\int_t^T e^{-\rho(s-t)}u[c,l,k,t]\Delta s\\
&\quad +MaxE_{t+\Delta t}\int_{t+\Delta t}^T e^{-\rho(s-t)}u[c,l,k,t]\Delta s + e^{-\rho(T-t)}B[W(T),T]\}
\end{aligned}
$$

$$
V[k,W,Y,t,T] \equiv MaxE_t\{\int_t^{t+\Delta t} e^{-\rho(s-t)}u[c,l,k,t]\Delta s + V[k,W,Y,t+\Delta t,T]\} \tag{2.15}
$$

$V[k,W,Y,t,T]$ est appelée fonction d'utilité indirecte. Elle correspond au niveau d'utilité maximal que les individus peuvent espérer sur l'ensemble de leur cycle de vie, s'ils allouent de façon optimale leur temps et leur richesse dans les différentes activités qui leur sont proposées. Elle est supposée strictement croissante et concave en k et W et Y. Dans ce modèle, le capital humain et le capital financier sont supposés être d'imparfaits substituts. C'est pourquoi k et W apparaissent séparément dans la fonction d'utilité indirecte $V(.)$. Cela provient du fait que le capital humain, à la différence du capital financier, ne peut être acheté ou vendu librement sur un marché. Il est non marchand et en partie irréversible. Comme nous l'avons mentionné plus haut, nous introduisons dans le modèle un vecteur de variables d'état Y qui permet de prendre en compte les risques de type macroéconmique que l'individu ne peut parfaitement maîtriser au moment où il prend ses décisions. A travers les corrélations entre ces variables aléatoires exogènes et celles décrivant les processus d'accumulation de capital humain et de richesse financière, nous allons montrer comment l'individu peut se couvrir contre de tels risques qui surviennent dans le temps. La raison fondamentale est que si de telles corrélations existent alors la variabilité globale du capital humain et de la richesse financière peuvent être en partie prévisible et doivent être intégrées dans les décisions d'investissement.

Le principe d'optimalité de Bellman permet de mettre en évidence les effets présents et futurs des variations des variables de contrôle sur la trajectoire optimale des variables d'état. Plus précisément, l'utilité maximale obtenue dans l'intervalle $[t, T]$ résulte d'une suite de choix des variables de contrôle λ, WX, c et l et de l'évolution des variables d'état k, W et Y. Par conséquent, le premier terme $u[c, l, k, t]\Delta s$ mesure la valeur des effets directs de la décision prise à l'instant t, alors que le second $V[k, W, Y, t + \Delta t, T]$ mesure les effets indirects, c'est-à-dire l'utilité cumulée que l'individu pourra obtenir dans l'intervalle $[t + \Delta t, T]$ compte tenu du choix réalisé dans l'intervalle $[t, t + \Delta t]$.

Dans l'annexe B.3, nous montrons que ce programme (2.15) est équivalent à :

$$\begin{aligned} 0 \equiv\ & Max\ \{u\,[c, l] + V_k\,(\mu_\omega + \mu_\theta\lambda + \lambda\sigma_\theta'\sigma_\omega - \delta - \sigma_\omega'\sigma_\delta)\,k \\ & + V_W\,[rW + (1 - \lambda - l)\,k - c + WX\,(\mu - r)] \\ & + \frac{1}{2}V_{WW}W^2X^2\sigma_s^2 + \frac{1}{2}V_{kk}\,(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta)'\,(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta)\,k^2 \\ & + V_Y'\mu_Y + \frac{1}{2}V_{YY}\sigma_Y'\sigma_Y + WXV_{WY}\sigma_s'\sigma_Y + V_{kW}\,(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta)'\,\sigma_s kWX \\ & + V_{kY}k\,(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta)'\,\sigma_Y - \rho V + V_t\} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Cette *équation aux dérivées partielles stochastiques* (EDPs) est connue sous le nom d'équation de Bellman du contrôle optimal stochastique, ou encore équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Les solutions intérieures pour cette équation sont obtenues de manière classique, en posant chacune des dérivées partielles égales à zéro[9]. On obtient alors les conditions d'optimalité qui définissent implicitement les quatre solutions $c^*(t)$, $l^*(t)$, $wX^*(t)$, et $\lambda^*(t)$.

Les deux premières conditions, pour $0 \leq t \leq T$, sont immédiates :

[9]Les indices les dérivées partielles par rapport aux variables de contrôle.

$$\frac{u_c}{V_W} = 1 \tag{2.17}$$

et

$$\frac{u_c}{u_l} = \frac{1}{k} \tag{2.18}$$

Les conditions (2.17) et (2.18) sont semblables à celles des modèles certains, puisque les paramètres relatifs au risque n'interviennent pas dans la détermination de ces deux conditions d'optimalité. En outre, la consommation courante et le temps de loisir courant sont affectés de manière similaire au cas certain par les variations de la richesse financière et du capital humain. En effet, un accroissement marginal de la richesse financière accroît la consommation courante et le temps de loisir courant de l'individu[10]. En supposant comme Williams, que le taux marginal de substitution entre la consommation et le loisir est indépendant du capital humain, alors une augmentation du capital humain courant accroît la consommation courante mais réduit le loisir[11]. En effet, l'incrément en capital humain augmente la valeur relative de la richesse financière courante, et donc à travers (2.17) accroît la consommation. Cependant, en augmentant l'utilité marginale de la richesse financière, l'incrément en capital humain accroît le coût d'opportunité du loisir. L'individu est donc incité à réduire son temps de loisir au profit du travail.

La troisième condition implique que la dérivée partielle de (2.16) par rapport à WX soit nulle, ce qui donne :

[10]En effet, si W augmente, alors on a d'après (2.17), $\frac{\partial u_c}{\partial W} = V_{WW}$. D'où $\frac{\partial c}{\partial W} = \frac{V_{WW}}{u_{cc}} > 0$, d'après l'hypothèse de concavité des fonctions d'utilité. En appliquant le même principe, on montre également que le loisir augmente avec la richesse financière : $u_l = ku_c = kV_W$. D'où $\frac{\partial u_l}{\partial W} = kV_{WW}$ et $\frac{\partial l}{\partial W} = k\frac{V_{WW}}{u_{ll}} > 0$.

[11]L'hypothèse $\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{u_c}{u_l}\right) = 0$ implique que $\frac{\partial c}{\partial k} = -\frac{u_c}{u_l}\frac{u_{cc}}{u_{ll}}\frac{\partial l}{\partial k}$. La fonction d'utilité étant strictement croissante et concave en c et en l, on a : $u_c > 0, u_l > 0, u_{cc} < 0$ et $u_{ll} < 0$. On en déduit que $\partial c/\partial k$ et $\partial l/\partial k$ sont de signe contraire. Or , d'après (17), $\frac{\partial u_c}{\partial k} = V_{Wk}$, d'où $\frac{\partial c}{\partial k} = \frac{V_{Wk}}{u_{cc}} > 0$. On en conclut que $\frac{\partial l}{\partial k} < 0$.

$$V_W(\mu - r) + V_{WW} W X \sigma_s' \sigma_s + V_{WY} \sigma_s' \sigma_Y + V_{kW} (\sigma_\omega + \lambda \sigma_\theta - \sigma_\delta)' \sigma_s k = 0$$

Soit

$$X^* = -\frac{V_W}{V_{WW} W} \frac{\mu - r}{\sigma_s' \sigma_s} - \frac{V_{kW}}{V_{WW}} \frac{k}{W} \frac{(\sigma_\omega + \lambda \sigma_\theta - \sigma_\delta)' \sigma_s}{\sigma_s' \sigma_s} - \frac{V_{WY}}{V_{WW} W} \frac{\sigma_s' \sigma_Y}{\sigma_s' \sigma_s} \tag{2.19}$$

La condition (2.19) est semblable à la condition d'optimalité d'un problème de portefeuille moyenne-variance standard. En effet, elle établit que le portefeuille d'actifs risqués de l'individu est constitué à l'optimum des deux portefeuilles de base. Le premier portefeuille $\frac{\mu - r}{\sigma_s' \sigma_s}$ est le portefeuille de marché standard. C'est la composante spéculative de la demande optimale d'acifs risqués. Elle représente le surplus de rendement attendu par l'individu de son investissement dans les N actifs risqués par rapport à l'actif sans risque. Les autres portefeuilles $\frac{(\sigma_\omega + \lambda \sigma_\theta - \sigma_\delta)' \sigma_s}{\sigma_s' \sigma_s}$ et $\frac{\sigma_s' \sigma_Y}{\sigma_s' \sigma_s}$ sont composés uniquement d'actifs risqués. Ils représentent respectivement les composantes de couverture intertemporelle contre les risques associés au capital humain et contre les risques macroéconomiques.

On remarque que la composition du portefeuille optimal d'actif risqué dépend crucialement de la perception qu'on les individus du risque $(\sigma_s' \sigma_s)$, mais aussi du comportement des individus face au risque. En effet, l'investissement en actifs risqués est proportionnel à la prime de risque $(-\frac{1}{2} \sigma_s' \sigma_s \frac{V_{WW} W}{V_W})$ et inversement proportionnel à l'indice d'aversion relative vis-à-vis du risque d'Arrow-Pratt[12] : $(-\frac{V_{WW} W}{V_W})$ ainsi qu'à la variance des rendements $(\sigma_s' \sigma_s)$. On notera que le poids attaché au portefeuille de marché est strictement l'inverse de l'indice d'aversion relative vis-à-vis du risque. En résumé, on peut dire qu'à l'optimum, les individus investiront d'autant moins dans les actifs financiers risqués que le risque est élevé et que leur aversion pour le risque

[12]Pour une présentation détaillée des différentes mesures de l'aversion au risque, *cf.* Laffont (1991).

est forte. Par contre, ils investiront d'autant plus que l'écart entre le rendement des actifs risqués et le rendement de l'actif sans risque est grand. Ces résultats sont tout à fait standards dans la théorie financière.

Enfin, le niveau optimal de l'investissement dans le capital humain est donné par :

$$V_k \mu_\theta k + V_k \sigma'_\theta \sigma_\omega k - V_W k + k^2 V_{kk} \left(\sigma_\omega + \lambda \sigma_\theta - \sigma_\delta\right)' \sigma_\theta + V_{kW} \sigma'_\theta \sigma_s k W X + V_{kY} k \sigma'_\theta \sigma_Y = 0$$

Ce qui donne, en réarrangeant les termes :

$$\begin{aligned}\lambda^* &= \left(-\frac{V_k}{V_{kk} k}\right) \frac{1}{\sigma'_\theta \sigma_\theta} \left(\mu_\theta + \sigma'_\theta \sigma_\omega - \frac{V_W}{V_k}\right) + \frac{\sigma'_\delta \sigma_\theta - \sigma'_\omega \sigma_\theta}{\sigma'_\theta \sigma_\theta} + \left(-\frac{V_k}{V_{kk} k}\right) \frac{V_{kY}}{V_k} \frac{\sigma'_\theta \sigma_Y}{\sigma'_\theta \sigma_\theta} \\ &\quad + \left(-\frac{V_k}{V_{kk} k}\right) \frac{V_{kW}}{V_k} \frac{\sigma'_\theta \sigma_s}{\sigma'_\theta \sigma_\theta} W X \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Comme pour l'investissement optimal dans les actifs risqués, l'investissement optimal dans le capital humain est constitué d'une composante spéculative et de plusieurs composantes de couverture. La structure de l'investissement optimal en capital humain est identique à celle de l'investissement sans les actifs financier. De même, comme nous l'explicitons plus bas, les effets des risques et de l'aversion au risque obéissent aux mêmes principes que ceux décrit pour un investissement dans des actifs financiers risqués. C'est pourquoi nous avons qualifié l'éducation d'actif risqué dans ce chapitre. Cependant, il existe une différence majeure entre le capital humain et le capital financier que nous avons déjà évoquée. Le capital financier est liquide de sorte qu'il est toujours possible de se couvrir contre le risque associé à chaque actif financier à travers un mécanisme de réallocation du portefeuille. C'est le principe de la diversification du portefeuille d'actif qui fonctionne quel que soit le montant investi et surtout qui fonctionne sans changer le niveau de son investissement. Dans l'annexe B.4, nous démontrons dans le cas particulier où le portefeuille d'actifs risqués est constitué de deux actifs, qu'à l'optimum, l'augmentation du risque sur un actif réduit la part de la richesse investie dans cet actif et accroît celle investie dans l'autre actif, sans changer le montant global de l'investissement. Comme l'a noté Shaw (1996), les possibilités de réduction du risque, à travers la diversification sont extrêmement limitées pour le capital humain. En effet, le capital humain est non liquide : il ne peut être acheté ou vendu librement. Il est attaché à son détenteur. Ainsi, contrairement au capital financier qui peut être réparti en N actifs, le capital humain est singulier de sorte que c'est à travers le montant de l'investissement en capital humain que les stratégies face au risque vont s'exprimer. C'est pourquoi, comme il est souvent évoqué dans la littérature, l'investissement dans le capital humain peut apparaître plus risqué que le capital financier.

Le premier terme du côté droit de l'équation (2.20) est le prix de marché du risque portant sur le capital humain. Il est positif. Il représente l'excès de rendement attendu de l'investissement dans le capital humain sur le marché du travail. Le second terme est la composante "variance minimale". Elle représente la couverture contre les risques inhérents au processus d'accumulation de capital humain. Elle est indépendante des préférences individuelles. Le troisième terme est la composante de couverture intertemporelle contre les chocs macroéconomiques, provenant de la présence de variables d'état qui peuvent influencer les processus stochastiques sous-jacents à la dynamique du capital humain et de la richesse financière. Le dernier terme représente la composante de couverture intertemporelle contre le risque portant sur les actifs financiers. Ce dernier terme existe en théorie si $\sigma'_\theta \sigma_s \neq 0$. Si tel est le cas, cela signifie que les chocs sur le marché financier influencent les choix d'éducation. Si cette covariance est positive, alors l'individu va réduire son investissement dans le capital humain si le risque sur le marché financier augmente. Si cette covariance est négative, l'individu va se protéger contre le risque sur le marché financier en augmentant sa demande optimale de capital humain. Poursuivre dans cette voie conduit à un exercice théorique très complexe. En effet, si l'on remplace la valeur optimale de X^* (équation 2.19) dans (2.20), on obtient une structure très compliquée de λ^*, à partir de laquelle il est très difficile d'étudier l'effet des différentes sources d'incertitude. Ainsi, pour simplifier, nous supposons dans le reste de l'analyse que $\sigma'_\theta \sigma_s = 0$. Autrement dit, comme Williams (1979), nous supposons que les chocs sur le marché financier n'ont pas d'impact sur θ, l'efficacité de l'éducation. C'est une hypothèse faible et réaliste au regard des quelques travaux qui ont essayé de mesurer empiriquement cette relation. Shaw (1996) a montré que la covariance entre le capital humain et le capital financier était nulle. Becker (1997) défend aussi l'idée que l'investissement dans le capital humain est largement indépendant des mouvements sur le marché financier, ce qu'avait déjà mis en évidence Fama et Schwert (1977), Liberman (1980) et plus récemment Ribeiro (2002). Santos et Veronesi (2001) et Palacios-Huerta (2003) infirment en partie cette conclusion puisqu'ils montrent que le rendement du capital humain aide à prédire le rendement des actifs financiers. Cependant, à notre connaissance, personne n'a démontré empiriquement l'effet inverse, à savoir un impact de la volatilité des actifs financiers sur les rendements du capital humain.

Si $\sigma'_\theta \sigma_s = 0$, le niveau otimal d'investissement dans le capital humain devient :

$$\lambda^* = \left(-\frac{V_k}{V_{kk}k}\right)\frac{1}{\sigma'_\theta\sigma_\theta}\left(\mu_\theta + \sigma'_\theta\sigma_\omega - \frac{V_W}{V_k}\right) + \frac{\sigma'_\delta\sigma_\theta - \sigma'_\omega\sigma_\theta}{\sigma'_\theta\sigma_\theta} + \left(-\frac{V_k}{V_{kk}k}\right)\frac{V_{kY}}{V_k}\frac{\sigma'_\theta\sigma_Y}{\sigma'_\theta\sigma_\theta} \tag{2.21}$$

Une telle structure de la demande optimale de capital humain met en évidence le rôle fondamental des risques, ou du moins de la perception qu'en ont les individus, représentés par l'ensemble des variances et des covariances instantanées $(\sigma'_\theta\sigma_\theta, \sigma'_\theta\sigma_\omega, \sigma'_\delta\sigma_\theta, \sigma'_\theta\sigma_Y)$.

L'investissement optimal dépend directement du risque associé à l'efficacité de l'apprentissage, mesuré par la variance du produit marginal de l'éducation $\sigma'_\theta\sigma_\theta$. Par contre, toutes les autres sources d'incertitude (dépréciation, prix des compétences et risques macro) interviennent indirectement par l'intermédiaire de leur covariance $\sigma'_\delta\sigma_\theta$, $\sigma'_\omega\sigma_\theta$, et $\sigma'_\theta\sigma_Y$ avec le produit marginal du capital humain θ.

Ainsi, la structure de la demande optimale de capital humain et l'effet des différents risques que nous étudions en détail dans la prochaine section dépendent fondamentalement du paramètre θ.

La grande différence avec le modèle de Williams (1979) est qu'ici l'effet global des différentes sources d'incertitude ne peut être déterminé sans ambigüité car il dépend du signe et de l'ampleur des différentes covariances qui n'apparaissent pas chez Williams. En effet, l'absence de variables d'état (Y) et l'hypothèse d'indépendance entre la valeur du capital humain et son efficacité ($\sigma'_\omega \sigma_\theta = 0$) conduisent Williams aux prédictions suivantes : un accroissement du risque sur le produit marginal de l'éducation ($\sigma'_\theta \sigma_\theta$) conduit à une baisse de l'investissement dans le capital humain sur le cycle de vie. De manière similaire, si l'on suppose une relation négative entre l'efficacité de l'apprentissage et la dépréciation du capital humain ($\sigma_{\theta\delta} < 0$), les individus sont incités à réduire leur investissement pour se protéger d'un risque accru d'une dépréciation de leurs compétences.

Dans notre modèle, ces résultats restent valides mais sont insuffisants pour caractériser l'effet global du risque. D'autres risques apparaissent à l'optimum et peuvent avoir un effet contradictoire. Pour mesurer l'impact de ces différentes sources de risque, il est nécessaire de spécifier plus en détail les préférences individuelles car l'ampleur de ces effets dépend fondamentalement de la mesure d'Arrow-Pratt d'aversion relative vis-à-vis du risque[13] $-\frac{V_{kk}k}{V_k}$. En effet, cet indice d'aversion qui est construit à partir de la fonction d'utilité indirecte V, absorbe généralement l'effet de tous les paramètres du modèle sur la structure temporelle des valeurs optimales. Sans restrictions supplémentaires sur les préférences individuelles il n'est pas possible d'obtenir de solution explicite à l'équation (2.21) ni d'évaluer l'impact sur le cycle de vie de la variation des paramètres du modèle. C'est pourquoi dans la section suivante nous résolvons le modèle dans le cas de préférences logarithmiques. De plus, Y est un vecteur de variables d'état. Il est par conséquent très difficile de décrire toutes les corrélations entre θ et chaque variable d'état, ainsi que leur effet sur la décision d'investissement dans le capital humain. Cette difficulté est accentuée par le fait que l'impact des chocs exogènes dépend de V_{kY} qui peut être de signe différent selon les variables. C'est pourquoi, dans la section suivante, nous focalisons l'analyse sur une variable

[13]On notera que de manière classique, une augmentation de l'aversion au risque conduit à une réduction de l'investissement dans le capital humain.

macroéconomique qui fait sens pour l'économiste du travail et qui est par ailleurs une véritable source de variabilité des gains sur le cycle de vie : le taux de chômage.

2.4. Préférences logarithmiques, chômage et impact des risques

Jusqu'ici, nous avons supposé que les individus partageaient leur temps entre activités de travail, d'éducation et de loisir. Nous supposons maintenant que les individus peuvent être au chômage une partie de leur temps. Nous notons $u(t)$, la partie du temps déduite du temps de travail pendant laquelle les individus sont au chômage. Sous cette nouvelle hypothèse, le revenu courant du travail devient

$$y(t) = (1 - \lambda(t) - l(t) - u(t))k(t) \tag{2.22}$$

Où $k(t)$, la valeur du capital humain accumulé par l'individu à la date t, mesure toujours le revenu du travail correspondant au temps de travail durant la période courante $(1 - \lambda - l - u)$ [14].

Nous supposons que le taux de chômage courant est parfaitement observé. Par contre, le taux de chômage futur est inconnu et il est supposé suivre le processus de diffusion suivant :

$$du\,(t) = \mu_u dt + \sigma_u dZ\,(t) \tag{2.23}$$

[14] Cette spécification, dans laquelle l'offre de travail peut être qualifiée de semi endogène dans la mesure où chômage involontaire et loisir volontaire apparaissent simultanément, peut paraître à première vue problématique. En réalité, la question d'intégrer ou non le loisir s'il y a du chômage dans l'économie est marginale, car cela change peu les résultats du modèle. En effet, à l'optimum, les risques n'affectent pas l'arbitrage travail loisir. Les risques ont uniquement un impact sur les décisions d'investissement et non sur la consommation et le loisir. Intégrer le chômage tel que nous le faisons ou considérer l'offre de travail endogène ne change pas les résultats concernant la relation entre l'éducation et les risques. Comme nous le montrons plus bas, seuls les changements du taux de chômage moyen affectent l'arbitrage consommation-loisir.

En utilisant la formule (2.23) et en remplaçant (2.22) dans (2.11), la dynamique de la richesse financière, après avoir appliqué le lemme d'Itô's, devient :

$$dW = [rW + (1 - \lambda - l - \mu_u) k - c + WX (\mu - r) - kWX\sigma_s'\sigma_u] dt + [WX\sigma_s' - k\sigma_u] dZ \tag{2.24}$$

Dans ce cadre modifié, le programme auquel est soumis l'individu, si l'on suppose que ses préférences sont décrites par une fonction d'utilité instantanée logarithmique, est le suivant :

$$Max\ E_t \int_t^T e^{-\rho(s-t)} [\phi_c \ln c + (1 - \phi_c) \ln l] ds + e^{-\rho(T-t)} B [W(T), T] \tag{2.25}$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \frac{dk}{k} &= (\mu_\omega + \mu_\theta \lambda - \mu_\delta + \lambda \sigma_\theta' \sigma_\omega - \sigma_\delta' \sigma_\omega) dt + (\sigma_\omega + \lambda \sigma_\theta - \sigma_\delta)' dZ \\ dW &= [rW + (1 - \lambda - l - \mu_u) k - c + WX (\mu - r) - kWX\sigma_s'\sigma_u] dt + [WX\sigma_s' - k\sigma_u] dZ \\ \text{et } c &\geqslant 0,\ 0 \leqslant \lambda, l \leqslant 1 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Comme nous le démontrons dans l'annexe B.5, la résolution du problème (2.25) sous les contraintes (2.26) plus les conditions appropriées de transversalité donne les solutions explicites suivantes :

$$c^* = \frac{\phi_c}{A(t,T)} [B(t,T) k + W - C(t,T) u] \tag{2.27}$$

$$l^* = \frac{1 - \phi_c}{A(t,T) k} [B(t,T) + W - C(t,T) u] \tag{2.28}$$

La consommation (2.27) et le loisir (2.28) augmentent à l'optimum avec la richesse financière et baissent avec le taux de chômage courant, comme on doit s'y attendre. Ils augmentent également avec leur poids respectif dans la fonction d'utilité. Par contre, le niveau courant de capital humain accroît le niveau de consommation optimal mais réduit la durée optimale du loisir. En effet, le capital humain courant correspond au salaire associé à chaque unité de temps travaillée. Ainsi, le capital humain accroît le revenu du travail disponible pour les dépenses de consommation, augmentant de ce fait le coût d'opportunité du loisir. Ceci explique pourquoi dans les modèles de capital humain le loisir décroît avec le salaire (et le chômage).

$$WX^* = \frac{\left[B\left(t,T\right)k + W - C\left(t,T\right)u\right]\left[\left(\mu - r\right) - k\sigma_s'\sigma_u\right]}{\sigma_s'\sigma_s} + \frac{\sigma_s'\sigma_u}{\sigma_s'\sigma_s}\left[k + C\left(t,T\right)\right] - \frac{\left(\sigma_\omega - \sigma_\delta\right)'\sigma_s}{\sigma_s'\sigma_s}B\left(t,T\right)k \tag{2.29}$$

Comme dans le cas général, l'investissement dans les actifs risqués (2.29) augmente avec la richesse financière courante $W(t)$, et décroît avec l'aversion absolue vis-à-vis du risque $\frac{1}{B(t,T)k+W-C(t,T)u}$. Comme on peut s'y attendre, le taux de chômage courant, en réduisant le revenu courant du travail, réduit aussi la proportion de la richesse financière qui peut être investie dans les actifs risqués. L'effet du niveau de capital humain courant n'est pas clair. D'un côté, le capital humain a un impact strictement positif sur la composante spéculative, mais de l'autre, il affecte de manière ambigüe les composantes de couverture contre le risque de chômage et contre le risque associé au capital humain, à travers les covariances entre le prix des actifs risqués et les autres processus stochastiques.

$$\lambda^* = \left[1 + \frac{W - C\left(t,T\right)u}{B\left(t,T\right)k}\right]\frac{1}{\sigma_\theta'\sigma_\theta}\left(\mu_\theta + \sigma_\theta'\sigma_\omega - \frac{1}{B\left(t,T\right)}\right) - \frac{\left(\sigma_\omega'\sigma_\theta - \sigma_\delta'\sigma_\theta\right)}{\sigma_\theta'\sigma_\theta} + \frac{1 + C\left(t,T\right)}{B\left(t,T\right)k}\frac{\sigma_\theta'\sigma_u}{\sigma_\theta'\sigma_\theta} \tag{2.30}$$

Avant d'étudier de manière approfondie les effets des différents risques, nous soulignons que, comme dans le cas certain, l'investissement dans le capital humain (2.30) est une fonction décroissante du niveau courant d'investissement. Il est important de noter que dans le cas certain, cette propriété de l'investissement dans le capital humain repose sur l'hypothèse de rendements décroissants, qui assure l'existence et l'unicité de la solution. Ici, cette propriété découle de la résolution dans un cadre incertain qui n'impose pas la décroissance de la productivité marginale de la production de capital humain.

Par contre, l'investissement optimal dans le capital humain est une fonction croissante de la richesse financière courante. Ainsi, le modèle prédit que les individus les plus riches accumulent davantage d'éducation, une prédiction souvent vérifiée au niveau empirique. Cette propriété importante, mise en évidence par Williams (1979) et que l'on retrouve ici, contraste fortement avec les prédictions des modèles sans incertitude. En effet, dans le modèle de Heckman (1976, page 523), dont la structure est semblable à celle-ci, l'investissement en capital humain n'est pas affecté par les variations de la richesse financière. Il en résulte que les différences de niveaux d'éducation observées entre des individus ayant des ressources financières différentes sont communément attribuées à des différences de taux d'intérêt réels. Ces différences de taux d'intérêt sont interprétées comme étant la preuve indirecte d'une imperfection du marché des capitaux. Sans doute, comme l'avait déjà fait remarquer Becker (1993), que cette hétérogénéité dans les taux d'intérêt individuels existe et qu'elle accroît la contrainte financière des individus les moins bien dotés. Cependant ici, l'hétérogénéité du coût d'opportunité de l'éducation ne provient pas d'une hétérogénéité des taux d'intérêt. Toutes choses égales par ailleurs, c'est parce que les individus ayant de faibles ressources financières, font face à un coût d'opportunité du capital humain plus élevé, qu'ils atteignent des niveaux d'éducation et donc de salaire plus faibles que les individus mieux dotés financièrement. Ce résultat théorique, plutôt réaliste, est obtenu indépendamment de toute imperfection du marché des capitaux.

La structure de l'investissement optimal en éducation, comme celle de l'investissement financier, fait apparaître une composante spéculative et deux composantes de couverture. La première composante, la composante spéculative, représente l'excès de rendement attendu sur le marché du travail du risque encouru à travers l'investissement dans le capital humain. En d'autres termes, cette composante exprime la rémunération que l'individu attend de sa prise de risque. Cette composante, positive, incorpore l'indice d'aversion relative vis-à-vis du risque $\frac{1}{1+\frac{W-C(t,T)u}{B(t,T)k}}$, qui, comme dans le cas général, réduit toujours l'investissement optimal. Toutes choses égales par ailleurs, les individus les plus averses au risque doivent, selon ce modèle, atteindre des niveaux d'éducation moins élevés que les autres. De même, le taux marginal de substitution entre le capital humain et le capital financier $\frac{1}{B(t,T)}$ réduit le temps alloué à l'éducation. Dans le temps, la valeur marginale du capital humain décroît plus vite que celle du capital financier. Le capital financier peut être transmis aux générations futures à la fin du cycle de vie. Par conséquent la valeur marginale de la richesse peut être positive[15]. Par contre, les possibilités de transmission du capital humain sont beaucoup plus limitées. Au cours du cycle de vie la valeur marginale du capital humain baisse et tend vers zéro en fin de cycle de vie, car les possibilités de rentabilisation de l'investissement deviennent de plus en plus minces au fur et à mesure que l'horizon de l'individu se rétrécit. Ce principe au coeur de la théorie du capital humain explique pourquoi l'investissement dans le capital humain est concentré au début du cycle de vie puis qu'il baisse au cours du temps.

On observe également que le taux de chômage courant réduit mécaniquement le niveau optimal d'investissement dans le capital humain. Cela provient directement du fait que nous avons modélisé le chômage comme une partie du temps disponible prise sur toutes les autres activités. Nous avons choisi cette modélisation du chômage car elle permet une résolution simple du modèle et une analyse directe de l'effet du risque portant sur le taux de chômage futur sur la demande optimale d'éducation. On a souvent l'habitude d'intégrer au modèle standard de capital humain la probabilité d'être

[15]De ce point de vue, elle n'est pas obligatoirement décroissante dans le temps.

au chômage. Le résultat classique de ce type de modèle est que la probabilité d'être au chômage dans le futur, réduit le coût d'opportunité de l'éducation, c'est-à-dire le revenu du travail auquel renonce l'individu lorsqu'il s'éduque et ne travaille pas, de sorte que l'éducation est encouragée. Cette probabilité est fixe et parfaitement connue par l'individu. Or, ce qui nous intéresse ici, ce sont au contraire les conséquences en termes de choix individuels du fait de ne pas connaître parfaitement son exposition future au chômage. Autrement dit, nous nous intéressons aux conséquences de ne pas connaître le coût d'opportunité de l'éducation. Dans l'annexe B.6, nous proposons une modélisation alternative plus classique du taux de chômage. Nous introduisons au modèle non pas le temps de chômage mais la probabilité stochastique d'être au chômage. Nous confirmons le résultat standard, à savoir qu'une augmentation de la probabilité moyenne d'être au chômage, en réduisant le coût d'opportunité espéré de l'éducation, accroît la demande optimale d'éducation. Par contre du point de vue du risque associé au taux de chômage futur, les résultats sont identiques à ceux présentés ci-dessous.

La variabilité du taux de chômage futur réduit l'investissement optimal dans le capital humain. En effet, si $\sigma'_\theta \sigma_u < 0$, la composante de couverture intertemporelle contre le risque de chômage est négative, impliquant une baisse de l'investissement en capital humain si le risque associé au chômage (σ_u) augmente. C'est le cas le plus probable, dans la mesure où une corrélation négative entre θ et u indique que les individus les plus doués sont moins touchés par le chômage que les autres. L'hypothèse opposée d'une corrélation positive impliquerait que les individus les moins efficaces seraient moins au chômage que les individus plus productifs. Cette hypothèse est pour le moins difficile à défendre.

De la même manière, l'individu est incité à réduire son investissement optimal en capital humain si le risque de dépréciation des compétences (σ_δ) augmente. Comme pour le risque associé au chômage, le risque portant sur la dépréciation des compétences intervient indirectement dans l'investissement optimal en capital humain à travers la covariance avec l'efficacité marginale de l'investissement ($\sigma'_\delta \sigma_\theta$). Si cette covariance est négative, ce qui là encore est le cas le plus probable[16], la composante de couverture "minimum-variance" est négative, et par conséquent, face à un risque accru de dépréciation l'individu réduit son investissement.

Puisque le risque sur le taux de chômage et le risque sur la dépréciation interviennent uniquement dans les composantes de couverture[17], leur effet peut être interprété en termes de protection. Face à un risque accru de chômage ou de dépréciation, l'individu se protège en réduisant son investissement dans le capital humain.

On remarque que l'efficacité moyenne de la production de capital humain (μ_θ) augmente l'investissement optimal, par contre le risque associé à cette efficacité, mesuré par la variance $\sigma_\theta'\sigma_\theta$, réduit l'investissement optimal dans le capital humain[18].

Ainsi, d'une manière générale, les individus réduisent leur niveau d'investissement dans le capital humain pour se couvrir des risques existants. Sur ce point, nos résultats rejoignent ceux de Williams (1979), dans le cadre d'une fonction d'utilité Cobb-Douglass[19]. Néanmoins, le signe négatif des composantes de couverture ne suffit pas pour conclure que l'incertitude réduit toujours le niveau d'investissement dans le capital humain. En effet, comme nous pouvons le constater, le risque associé au salaire (ou plus exactement au prix du stock de capital humain sur le marché du travail) intervient à la fois dans la composante "variance minimale" et dans la composante spéculative avec des effets opposés. Nous montrons que l'effet positif domine :

[16]Une covariance négative indique que les individus les plus doués ont des compétences qui se déprécient moins vite que les autres. A contrario, une covariance positive indiquerait que les individus les plus efficaces auraient un capital humain qui se déprécierait plus rapidement que les individus les moins efficaces.

[17]La différence entre la composante de couverture intertemporelle et la composante de couverture "minimum variance" est que la seconde est indépendante des préférences individuelles. Cette différence donne des indications sur l'efficacité a priori d'une politique publique. Par exemple, suivant notre modèle, le décideur public peut vouloir encourager la demande d'éducation en réduisant s'il le peut le risque de chômage. Cette politique peut avoir des effets nuancés ou même être mal ciblée, si des groupes d'individus ont une aversion pour le risque différente. Par contre, on sait avec ce modèle, qu'une politique qui parviendrait à réduire l'incertitude sur la dépréciation des compétences, aurait un impact positif certain sur la demande d'éducation, quelles que soient les préférences individuelles.

[18]En effet $\frac{\partial \lambda^*}{\partial \sigma_\theta} = -\frac{1}{\sigma_\theta}\left[\lambda^* + \frac{\frac{Bk+W-Cu}{Bk}\left(\mu_\theta - \frac{1}{B}\right)}{\sigma_\theta^2}\right] < 0.$

[19]Dans une version antérieure de ce chapitre, nous avons travaillé avec une fonction d'utilité Cobb-Douglass. Les résultats concernant l'effet des risques sur l'investissement dans le capital humain sont identiques. Seule change l'expression de l'indice d'aversion au risque, puisque celui-ci dépend de la fonction d'utilité choisie. Cependant cela n'altère pas la nature des résultats.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{\omega}' \sigma_{\theta}} = \frac{1}{\sigma_{\theta}' \sigma_{\theta}} \frac{W - C(t,T)\,u}{B(t,T)\,k} > 0^{20}$$

Face à une augmentation du risque sur la valeur marchande des compétences, l'individu investit davantage dans le capital humain

L'interprétation économique que nous donnons de ces résultats est la suivante : lorsque l'éducation est considérée comme un actif risqué, l'individu s'expose au risque lorsqu'il investit. Il court le risque de voir son investissement ne pas être rémunéré. Pour se couvrir contre cette incertitude, il est naturellement incité à réduire son investissement, sauf si la prime de risque offerte par le marché est suffisamment grande. C'est le cas pour le risque sur le salaire. Dans le modèle, une telle compensation est possible car le prix du capital humain entre dans la dynamique d'accumulation du capital humain[21]. Ce n'est pas le cas pour le risque de chômage qui est complètement exogène au processus d'accumulation du capital humain. L'individu ne peut valoriser ce risque, il ne peut qu'en partie s'en protéger. C'est pourquoi, le risque sur le taux de chômage futur entre uniquement dans la composante de couverture intertemporelle avec un effet négatif. Si la prime de risque n'est pas suffisante l'individu ne prend pas de risque. C'est pourquoi les individus dans le modèle réduisent leur niveau d'éducation et allouent davantage leur temps au travail lorsque les risques augmentent.

Ces résultats nouveaux contrastent avec les résultats tranchés de Williams (1979) concernant l'effet du risque sur l'investissement dans le capital humain. L'extension

[21]Dans une version antérieure du modèle, nous avions intégré une autre source d'incertitude provenant du marché du travail : le déclassement salarial. Celui-ci était modélisé comme la partie du stock de capital humain non utilisée dans l'activité productive, et donc non rémunérée. On montrait alors que l'effet du risque de déclassement salarial était identique au risque sur la valeur du capital humain (σ_ω), de même que son interprétation. Ce type de modélisation permet de montrer qu'il est possible de décomposer l'impact de différents risques pouvant affecter le salaire. Dans le cas certain, une telle décomposition est inutile, dans la mesure où l'introduction d'une constante multiplicative s'élimine lorsqu'on calcule les variations du capital humain dans le temps. En incertitude, les paramètres changent dans le temps. Ainsi, lorsqu'on applique le lemme d'Itô, les facteurs multiplicatifs deviennent additifs et les covariances entre ces facteurs apparaissent et ne s'éliminent pas. L'analyse est par conséquent affinée. Nous montrons que les effets des différents risques se cumulent dans le même sens, confirmant le fait que le risque sur le salaire a un effet différent des risques portant sur le volume de capital humain. La contribution théorique de cette d'extensions n'est pas décisive pour l'analyse. C'est pourquoi nous ne la reportons pas dans la thèse.

que nous proposons ici permet de mieux comprendre pourquoi l'effet agrégé est difficile à établir sans ambigüité. Les risques qui portent sur le processus d'accumulation du capital humain exercent un effet négatif, alors que les risques portant sur le salaire ou la valeur marchande des compétences productives ont un effet positif sur l'investissement dans le capital humain. Ainsi la perception qu'ont les individus des différents risques et de leur ampleur (mesuré par les covariances) est fondamentale dans la décision d'investir dans le capital humain.

2.5. Conclusion

Le modèle construit dans ce chapitre permet d'étudier les choix individuels d'éducation en présence d'incertitudes, dans un cadre dynamique. L'hypothèse de départ de ce travail, déduite de la revue de littérature présentée dans le chapitre précédent, était que l'effet de l'incertitude ne peut être déterminé a priori si différentes sources d'incertitude (celles portant sur le processus d'apprentissage et celles portant sur la situation future sur le marché du travail) n'était pas identifiées. Sur la base du travail de Williams (1979), nous avons construit un modèle de programmation dynamique en temps continu qui permet de prendre en compte différentes sources d'incertitude et d'étudier leur effet sur la demande individuelle d'éducation. Nous apportons deux contributions par rapport à Williams (1979). D'une part, pour mettre davantage l'accent sur les problèmes de chômage observés sur les marchés du travail européens, nous avons intégré au modèle le risque sur le taux de chômage futur. D'autre part, nous avons supprimé l'hypothèse d'indépendance entre les variables risquées, nous permettant de voir comment les risques associés au processus d'accumulation de capital humain et ceux provenant du marché du travail interagissent. Cela nous permet de montrer comment, à la différence de Williams (1979), le risque sur le salaire intervient dans la décision optimale d'investir dans l'éducation. En particulier, nous montrons que l'effet sur la prime de risque est plus important que l'effet sur la couverture contre le risque, de sorte que l'individu augmente son niveau d'éducation face à un risque sur le salaire accru. Par contre, toutes les autres sources de risque, à l'instar de Williams (1979), ont un effet négatif sur la demande optimale d'éducation ; l'effet négatif de couverture contre le risque domine. Ces résultats reposent fondamentalement sur la conception de l'éducation dans le modèle comme un actif risqué. Lorsque l'individu investi dans l'éducation il s'expose au risque, car l'éducation est supposé accroître la variabilité des gains futurs.

D'autres hypothèses concurrentes à celle du capital humain ont été développées sur rôle de l'éducation. La plus rependue dans la littérature est l'hypothèse de signal. Selon cette hypothèse l'éducation n'augmenterait pas le capital humain et donc la productivité des individus mais elle révélerait leurs capacités existantes. En d'autres termes, un niveau élevé d'éducation serait un moyen de réduire l'incertitude portant sur la véritable aptitude des individus. Une extension naturelle de ce travail serait d'étudier cette hypothèse dans la mesure où nos résultats dépendent fondamentalement de la façon dont l'éducation agit a priori sur la dispersion des gains. C'est précisément l'objet de notre prochain chapitre.

CHAPITRE 3

Capital humain, risques et effets de signal

Résumé

Dans ce chapitre, nous construisons un modèle de décision dans lequel le système de formation produit à la fois des compétences productives (capital humain) mais aussi de l'information sur la véritable productivité des individus (signal). Nous réévaluons dans ce nouveau cadre théorique, les effets de l'incertitude sur la demande optimale d'éducation. Nous montrons qu'avec l'introduction d'effets de signal, l'éducation peut être utilisée comme un moyen de couverture face aux risques, et en particulier contre le risque de chômage futur.

3.1. Introduction

A l'origine, dans le but de trouver les déterminants de la productivité individuelle pour construire les bases de l'économie de l'éducation moderne, les fondateurs de la théorie du capital humain se sont employés à définir et légitimer l'éducation comme un investissement, négligeant les questions relatives à la nature et à la structure de l'information sur le marché du travail. Au cours des années 1970 ont été développées à l'intérieur du paradigme néoclassique des théories alternatives à celles du capital humain pour prendre au sérieux la nature imparfaite de l'information concernant la productivité des travailleurs, ouvrant ainsi de nouvelles interprétations quant au rôle de l'éducation. De façon générale, les théories du "filtre" (terminologie empruntée à Arrow, 1973) et du "signal" (depuis Spence, 1973) étudient les conséquences de l'asymétrie de l'information sur les stratégies individuelles et leurs implications au niveau social. En amont de l'activité productive, l'éducation est supposée agir comme un mécanisme de tri des individus. En effet, lorsque les employeurs ne peuvent pas parfaitement évaluer la productivité des travailleurs, les individus sont incités à révéler leurs véritables capacités productives à travers leurs choix éducatifs. Dans ce cadre, l'éducation est considérée avant tout comme un dispositif de sélection des individus.

Si au départ les théories du tri semblent parfaitement adaptées à l'étude des comportements des agents économiques en situation d'incertitude, la question des effets de l'incertitude a finalement été évacuée de l'analyse. Le problème de sélection adverse, et avec lui l'incertitude, étant résolus à l'issue du processus d'éducation.

La prise en compte de l'imperfection de l'information dans le modèle de capital humain permet de répondre en partie au problème. En effet, la théorie du capital humain permet d'étudier l'influence des risques sur les décisions individuelles en matière d'éducation. Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'introduction du risque dans le modèle de capital humain standard conduisait à considérer l'éducation comme un actif risqué. Nous nous sommes efforcés de prouver que cette théorie, de par sa nature, appréhende l'éducation comme une activité qui exacerbe le risque. Lorsqu'un individu décide d'augmenter son niveau d'éducation, il accroît dans le même temps son exposition au risque. Dans ces conditions, un individu averse au risque réduira toujours son investissement dans l'éducation pour se couvrir contre le risque. Selon ce principe, et indépendamment des autres facteurs, la hausse de la demande d'éducation ne peut s'expliquer que par une baisse globale de l'incertitude, soit uniquement par l'augmentation de risque sur la valeur du capital humain (essentiellement le salaire) car il génère une prime de risque.

Ainsi, les conditions théoriques sous lesquelles, à l'optimum, l'éducation augmenterait avec le risque, sont très limitées. Le modèle de capital humain nous apprend qu'un individu ne poursuivra jamais davantage ses études pour se protéger contre le risque, que ce dernier provienne du système éducatif, de ses propres aptitudes ou du marché du travail. Ainsi, à partir du moment où l'on suppose que la productivité des individus, et ses déterminants - que sont l'aptitude, la dépréciation du capital humain et plus généralement l'ensemble des facteurs définissant l'efficacité du processus d'acquisition des compétences - ne sont pas parfaitement connus, le modèle de capital humain est incapable de présenter l'éducation comme un mécanisme de protection face au risque.

Or, il est possible en théorie de mettre en évidence de tels effets. C'est précisément l'objet de ce chapitre que de définir les conditions théoriques sous lesquelles l'éducation peut être utilisée par les individus comme un moyen de protection contre les risques futurs. Pour cela, il convient d'adopter une autre conception de l'éducation, plus large que celle de la théorie du capital humain standard. Au-delà de la fonction de production de connaissances et des compétences valorisables sur le marché du travail, il faut également considérer l'éducation comme un dispositif permettant de révéler de l'information sur la véritable productivité des individus, dans la lignée des théories du filtre et du signal. C'est pourquoi nous construisons un modèle général dans lequel l'éducation augmente la productivité individuelle et améliore la qualité de l'information sur la valeur de cette productivité. Dans ce cadre nouveau, où les effets de capital humain et de filtre/signal sont complémentaires, nous analysons l'impact de différentes sources d'incertitude : salaire, aptitude et chômage, sur la demande individuelle d'éducation. En particulier, nous parvenons à prédire qu'un individu averse au risque utilisera l'éducation comme une stratégie de couverture face au risque. C'est le résultat essentiel de ce chapitre.

La section suivante (3.2) présente les hypothèses, le principe et les implications des théories du filtre et du signal à travers une synthèse des principales contributions théoriques en économie du travail. La section 3.3 recadre l'hypothèse centrale du modèle concernant la qualité de l'information fournie par l'éducation dans la littérature sur le filtre et le signal et discute de ses implications dans la dynamique des salaires. La section 3.4 présente le modèle et les résultats dans un cadre complètement général du point de vue des processus stochastiques utilisés et des préférences individuelles. Dans un second temps, nous spécifions les préférences pour étudier en détail l'effet des différentes sources d'incertitude sur la demande d'éducation. La section 3.5 conclut le chapitre.

3.2. Hypothèse de signal et dynamique du capital humain

3.2.1. Revue de la littérature

L'existence d'une relation positive entre éducation et salaire est sans doute l'une des mieux établie empiriquement, quel que soit le lieu ou l'époque à laquelle elle ait été mesurée (Baudelot et Leclercq, 2004). L'explication dominante, celle du capital humain, est fondée sur l'idée que les individus, en renonçant à un gain immédiat, peuvent à travers l'éducation, augmenter la qualité future de leur travail et la valeur marchande qui lui est associée. Cependant, comme le souligne notamment Riley (1976), peu d'attention a été portée au processus de transmission de l'information dans les décisions d'investissement. En particulier, la théorie du capital humain suppose implicitement que les employeurs connaissent parfaitement la valeur de la productivité marginale de chaque travailleur et que d'une manière générale les coûts d'acquisition de l'information sont négligeables.

L'économie de l'information a été développée précisément pour comprendre les implications des problèmes informationnels auxquels peuvent être confrontés des agents économiques engagés dans une même transaction. Akerlof (1970) est l'un des premiers à avoir étudié de manière formelle les distorsions que génère l'asymétrie de l'information dans une économie concurrentielle[1].

Concernant le marché du travail, l'hypothèse d'asymétrie de l'information a conduit les économistes à formuler une interprétation nouvelle de la corrélation entre éducation et salaires. L'éducation servirait avant tout de filtre (Arrow, 1973) ou de signal (Spence, 1973) des capacités productives des individus, lorsque celles-ci ne sont pas observables par les employeurs.

Les dispositifs de filtre et de signal, permettent d'identifier des individus ayant des capacités productives différentes, en présence d'asymétrie de l'information. En révélant l'information cachée, ils résolvent le problème d'asymétrie de l'information. Le principe général est le suivant : supposons que la productivité individuelle et le salaire associé dépendent uniquement des capacités cognitives des individus, non observables directement par les firmes, mais connues par leur détenteur. Imaginons que les individus ne fournissent aucune information aux employeurs sur leur qualité. Dans ce cas, tous les travailleurs percevront le même salaire, égal à la productivité marginale moyenne de l'économie. Les travailleurs les plus productifs ont donc un salaire plus faible (et les travailleurs les moins productifs un salaire plus élevé) que dans une situation où chaque individu serait rémunéré à sa juste valeur. Les individus les plus performants ont donc un intérêt économique à révéler aux employeurs leurs caractéristiques afin de bénéficier d'une "rente d'aptitude"[2]. Dans le cas d'une non

[1] A travers son célèbre exemple du marché automobile, il a montré comment en tirant profit de l'information, la poursuite des intérêts privés pouvait conduire à une situation d'équilibre dans laquelle seules les voitures de mauvaise qualité, les « lemons », sont échangées.
[2] Terme emprunté à Stiglitz (1975).

révélation de sa performance, le travailleur doit alors partager sa rente avec les autres travailleurs[3].

En revanche, les individus peu productifs n'ont pas intérêt à révéler leur compétence. Cependant, à partir du moment où les meilleurs signalent leurs capacités aux employeurs, les individus qui ne fournissent aucune information sont aussi identifiés, par complémentarité, comme étant les moins productifs et toucheront par conséquent le salaire correspondant (plus bas). C'est ce que Stiglitz (1975) a appelé la Loi de Walras du filtre d'information.

Les firmes peuvent également avoir un intérêt à filtrer les compétences de leurs salariés. Si le coût de collecte de l'information est suffisamment bas, les firmes pourraient capter la différence de productivité entre les travailleurs les plus performants et la productivité moyenne de l'ensemble des travailleurs. Cependant, si l'information sur la compétence des salariés ne peut être maintenue secrète, la compétition entre les firmes fait augmenter le salaire jusqu'à la valeur de la productivité marginale des travailleurs les plus productifs, éliminant la rente initiale. Ainsi, les employeurs risquent de subir un braconnage de la part des autres entreprises qui n'auraient pas supporté ce coût, une fois le processus de filtrage des compétences réalisé. De même, comme l'a noté Riley (1976), l'évaluation de la productivité individuelle est coûteuse, en particulier dans les activités où la compétence est difficile à évaluer (métier de cadre, manager...), et plus généralement, partout où la compétence individuelle est difficile à démêler de la compétence globale dans l'entreprise. Ces coûts d'acquisition de l'information sont d'autant plus grands si l'information ne se dévoile que très lentement dans l'emploi ou que les qualifications des travailleurs ne sont pas en adéquation avec les postes sur lesquels ils sont placés.

Pourtant, les employeurs doivent pouvoir fournir des contrats de travails fondés sur la compétence à long terme des employés, qui est la vraie valeur de la productivité marginale. Du côté des travailleurs, il faut également que l'information révélée par le dispositif de filtre sur la productivité soit crédible pour pouvoir accepter de tels

[3]Ceci implique évidemment que le coût de signalement ne dépasse pas le gain espéré.

contrats. Sans quoi, les employés averses au risque peuvent refuser de supporter ce coût d'acquisition de l'information à travers un salaire initial faible.

En découle alors une question importante : les firmes peuvent-elles se servir du niveau d'éducation atteint par les individus pour prédire leur productivité future dans le travail ? Ou à l'inverse, les firmes qui offrent des salaires basés uniquement sur le niveau de scolarité atteint parviennent-elles à attirer des travailleurs qui ont la productivité désirée ?

Pour Riley (1976) cela dépend de la façon dont les coûts marginaux varient entre les individus. Etant donné la règle de décision commune à tous les individus, selon laquelle l'individu poursuit des études jusqu'à ce que le bénéfice marginal de l'éducation égalise le coût marginal, les individus ayant un coût marginal plus faible accumuleront davantage d'éducation. Enfin, et c'est l'hypothèse fondamentale de Spence (1973), si les coûts marginaux de l'éducation sont fortement et négativement corrélés avec la productivité du travail, alors les individus les plus diplômés sont aussi les plus productifs. Riley (1976) rajoute à l'argument de Spence que les individus les plus productifs apprennent sans doute plus vite que les autres à l'école. C'est donc du côté du produit marginal de l'éducation que se différencient les individus chez Riley. Les individus ayant les plus fortes aptitudes cognitives atteignent des niveaux d'éducation plus élevés que les individus moins doués, car ils ont un coût d'opportunité de l'éducation plus faible. Dans la mesure où les caractéristiques individuelles sont très difficiles à évaluer pour les firmes avant que le processus d'éducation soit réalisé, les entreprises vont utiliser le niveau d'éducation atteint par les individus comme critère d'embauche. *in fine*, le mécanisme de filtre par l'éducation du modèle de Riley (1976) décrit un processus d'auto-sélection identique à celui décrit par Spence (1973).

Les théories de filtre et de signal sont très proches. Riley (2001) les qualifie de "théories jumelles". Les termes de filtre et de signal ont d'ailleurs été longtemps employés de manière substituable dans la littérature. Elle sont de nos jours généralement regroupées sous le terme générique de "modèle de tri", suivant la terminologie de Weiss (1995), eu égard à la fonction commune incarnée par l'éducation dans les deux modèles. En résumé, les deux théories reposent sur la même hypothèse (asymétrie de l'information) et aboutissent aux mêmes conclusions (tri des individus). Seul le principe de fonctionnement diffère légèrement. Plus précisément, la seule différence est l'ordre dans lequel interviennent les agents. Dans le modèle de signal, c'est l'agent informé qui agit en premier. L'individu décide de son niveau d'éducation. A travers son choix, il révèle ses caractéristiques cachées (aptitudes). La firme en déduit une valeur moyenne de la productivité marginale et ajuste son offre de travail de façon à égaliser le salaire et la productivité marginale (condition de maximisation du profit). Dans le modèle de filtre c'est l'agent non informé qui agit en premier. A partir des niveaux de scolarité, les firmes infèrent sur les différences de productivité individuelle. Les firmes fixent les salaires et les individus répondent à ces inférences en allant plus longtemps à l'école (pour les individus ayant les plus grandes aptitudes cognitives).

Les théories du tri ont été présentées comme une alternative à la théorie du capital humain pour expliquer la relation éducation – salaire, à l'intérieur du cadre néo-classique. Au plan microéconomique, la différence essentielle porte sur les origines de la productivité individuelle. Dans les théories du tri, les différences de productivité préexistent à l'éducation. Les individus ont des compétences productives exogènes, c'est-à-dire innées ou acquises à l'extérieur du système éducatif. L'éducation permet simplement de révéler ces caractéristiques non observables que les individus n'auraient pas pu valoriser. Ce rôle informationnel de l'éducation est non productif. Au contraire, la théorie du capital humain suppose que l'éducation est à l'origine de la productivité. En investissant dans l'éducation, les individus augmentent leurs compétences productives et le salaire associé. Dans la théorie du capital humain, l'éducation est éminemment productive, y compris en présence de problèmes informationnels. Que l'incertitude influence les choix éducatifs des individus, c'est un fait. C'est l'objet de cette thèse que de les étudier. Cependant, quel que soit l'effet de l'incertitude sur les comportements individuels, *in fine*, les salaires seront égaux à la valeur de la productivité marginale. En d'autres termes, il est possible qu'un individu ait sacrifié "inutilement" du temps à l'éducation, mais en aucun cas, cela peut donner lieu à un gaspillage des ressources collectives. Par exemple, imaginons qu'un individu dépense beaucoup de temps à s'éduquer et qu'au final il échoue toujours à ses examens. Il aura accumulé finalement peu de connaissances. Sa productivité et son salaire seront faibles. Imaginons un autre individu qui passe lui aussi beaucoup de temps dans le système éducatif, mais qui au final réussit brillamment tous ses examens. Cet individu aura accumulé beaucoup de connaissances durant son parcours éducatif. Cependant, si ses connaissances ne sont pas traduites en compétences productives sur le marché du travail, soit parce qu'elles sont sous-utilisées ou non-adaptées au poste de travail (problème de matching), soit parce qu'elles sont en abondance sur le marché[4], soit tout simplement par ce qu'elles se sont pas demandées, alors l'individu n'en tirera qu'une rémunération faible. En d'autres termes, un individu peut avoir une forte productivité potentielle (ou réelle) à la sortie du système éducatif, mais si celle-ci n'est pas valorisée par le marché du travail, alors la valeur de cette productivité est faible et le salaire aussi. Ces exemples, que l'on pourrait multiplier, montrent à la fois l'ambivalence et la puissance du concept de capital humain. Le temps consacré par un individu à l'éducation ne suffit pas à caractériser son capital humain. Le capital humain se définit par la combinaison de trois dimensions : le temps consacré à l'éducation, l'efficacité de ce temps et la valeur marchande du produit de l'éducation, c'est-à-dire le produit des deux dimensions précédentes (durée $\times$ efficacité de l'éducation). Voila pourquoi, dans la théorie du capital humain, si la production de connaissance n'est pas valorisée comme le souhaiteraient tous les individus, elle est néanmoins toujours et par nature efficiente pour l'économie.

En revanche, on sait depuis Arrow (1973) que si l'éducation a pour unique fonction de filtrer ou signaler les compétences, alors les ressources qui lui sont consacrées peuvent être sous-optimales. Par nature, l'asymétrie de l'information, à travers les incitations privées qu'elle suscite, génère des distorsions de prix (en l'occurrence de salaires). Il en résulte que la somme des gains individuels issus de l'éducation n'est

[4]Dans ce cas l'individu subira une dévaluation de ses compétences que l'on qualifie souvent de déclassement salarial.

plus égale au gain collectif. En effet, les salaires fixés par les firmes ne peuvent pas refléter parfaitement la productivité puisque, par hypothèse, celle-ci n'est pas observable directement. Ils rémunèrent également le processus de production d'information par l'éducation. Dans ces conditions, les rendements privés seront en général plus élevés que le rendement social. En effet, si les individus augmentent leur niveau de scolarité pour signaler un fort potentiel productif, sans augmenter pour autant leur niveau de productivité de départ, alors le bénéfice privé que les individus retirent de leur différenciation n'est pas répercuté au niveau agrégé, puisque le coût global de l'éducation n'est pas compensé par une production de richesse supplémentaire.

Ainsi, contrairement à la théorie du capital humain, la plupart des modèles de tri (Arrow 1973, Spence 1973, Stiglitz 1975, Riley 1976) concluent à l'inefficacité sociale des dépenses éducatives[5]. Eu égard aux problèmes de définition des politiques publiques, budgétaires et éducatives que pose ce type de conclusion, il est par conséquent très important de pouvoir distinguer empiriquement les effets de tri des effets de capital humain. C'est une tâche très difficile. Indépendamment des problèmes d'identification qui se posent à l'économètre, sur lesquels nous reviendrons en détail dans le chapitre suivant, le problème de fond est avant tout théorique. Il réside dans l'incapacité de ces théories à fournir des prédictions différentes au plan microéconomique. Les stratégies éducatives reposent en effet sur les mêmes arbitrages individuels. Il en résulte que les prédictions de l'effet de l'éducation sur les salaires et de l'effet des capacités cognitives sur l'éducation et donc sur les salaires sont identiques. Ces théories prédisent également, dans leurs extensions, les mêmes problèmes de valorisation des compétences qui peuvent se poser sur le marché du travail et que l'on observe aujourd'hui. Dans les théories du tri, la conséquence immédiate de la différenciation des compétences attendues de l'école est l'inflation des diplômes. Cette course à la différenciation produit simplement une translation vers le haut des niveaux de scolarité atteints, n'affectant pas la rente individuelle tirée de l'éducation supplémentaire. Si l'offre éducative n'est pas adaptée à la demande de différenciation, c'est-à-dire qu'un

[5]Du point de vue de la production de richesses.

nombre important d'individus possèdent le même diplôme, dans ce cas le mécanisme de différentiation ne fonctionne plus et l'on doit s'attendre à une dévalorisation des titres scolaires et à un phénomène déclassement salarial.

Dans la théorie du capital humain standard, la productivité dépend uniquement du niveau de scolarité de l'individu et non de celui des autres. Cela provient de l'hypothèse d'atomicité des agents qui permet de définir le prix du capital humain de façon exogène aux comportements individuels ; il est fixe et déterminé par le marché. Si l'on suppose que la valeur des compétences est définie par la loi de l'offre et de la demande de chaque compétence sur le marché du travail, alors il est tout à fait possible de montrer que la valeur des compétences productives d'un individu dépend de celles des autres et en particulier que les compétences abondantes sur le marché du travail seront déclassées.

Riley (2001) appelle à un approfondissement théorique des modèles de tri et de capital humain. L'économiste doit établir de nouvelles prédictions théoriques, pour pouvoir construire des stratégies d'estimation qui permettent d'identifier beaucoup plus clairement les effets de filtre et de capital humain. Nous proposons dans ce chapitre une tentative de réponse à l'appel de Riley (2001), en construisant un modèle qui combine les deux fonctions de l'éducation : la production de capital humain et la production d'information sur les qualités individuelles. L'idée étant de voir si l'introduction d'effets de signal, dans un sens que nous définissons dans la section suivante, influence le comportement éducatif des individus face au risque mis en évidence dans le chapitre précédent.

3.2.2. Formation de l'hypothèse de signal et dynamique des salaires

Penser les effets de l'éducation à travers une conception purement informationnelle est trop réducteur. D'une part, ce serait négliger toute une littérature macroéconomique moderne sur le développement et la croissance, qui place au contraire l'éducation au cœur de la dynamique économique des nations[6]. Par ailleurs, au plan microéconomique, la poursuite des intérêts privés ne conduit pas toujours à une situation d'équilibre. Weiss (1983) pose la question suivante : si l'éducation révèle parfaitement les capacités individuelles à chaque niveau de scolarité, quel est l'intérêt pour les firmes d'attendre l'obtention du diplôme final, alors qu'elles pourraient embaucher dès la fin de la scolarité obligatoire. Lorsque les élèves intègrent ce comportement de la part des firmes, Weiss (1983) montre que l'équilibre de signal disparait. A l'inverse, si le système éducatif filtre mal les capacités individuelles, le rendement attendu de l'éducation risque d'être en dessous de son coût, alors personne n'aura intérêt à s'éduquer (Stiglitz, 1975).

Pour autant, il est difficile d'imaginer que l'éducation n'apporte aucune information sur les individus. A partir du moment où sont définis des critères d'évaluation transparents, identiques pour tous les individus, et appliqués de manière collégiale par un ensemble d'enseignants, on peut sans conteste affirmer que tout système éducatif qui remplit ces conditions fournit de l'information sur la qualité des élèves. La sélection et l'auto sélection qui s'opèrent à l'intérieur du système éducatif, à travers les différentes séries d'évaluations qui sanctionnent ou valident l'acquisition des connaissances et les choix de parcours, sont les deux principaux vecteurs de transmission de l'information. La capacité d'un individu à réussir ou non un cursus scolaire donne des indications aux employeurs sur la productivité future de l'individu. Elle renseigne également l'individu sur ses propres capacités. Si l'on admet que la transmission des connaissances est la mission principale de tout système éducatif, l'orientation scolaire et la sélection (réussite ou échec scolaire) sont les conditions de son efficacité. En

[6]Depuis Denison (1967) jusqu'à Mankiw, Romer et Weil (1992), en passant par, Romer (1990) et Lucas (1988).

effet, pour l'institution, c'est une condition d'allocation optimale des ressources. Pour l'individu, c'est le moyen d'identifier ses avantages comparatifs et donc de s'orienter là où il pense être le meilleur. De l'efficacité du système éducatif dépend directement la qualité et la crédibilité de l'information transmise par l'éducation.

Dans ce chapitre, nous tentons la construction d'un modèle théorique qui réunit les deux principales fonctions microéconomiques de l'éducation : la production de compétences dans la lignée de la théorie du capital humain, et la production d'information dans la lignée des théories du filtre et du signal.

La prise en compte des deux effets de l'éducation n'est pas nouvelle. Stiglitz (1975) et Riley (1976) ont déjà construit dans un cadre statique un modèle de filtre qui intègre des effets d'apprentissage. Ce qui est nouveau ici, c'est le cadre d'analyse spécifique qui combine les deux effets microéconomiques de l'éducation et permet l'étude des effets de l'incertitude.

Dans le chapitre précédent, nous avons répondu à la question des effets de l'incertitude sur les choix éducatifs des individus, quand l'éducation produit uniquement du capital humain. Mais à la question : quels sont les effets de l'incertitude sur les décisions individuelles d'éducation, lorsque celle-ci produit du capital humain et de l'information sur les capacités des individus ? Personne, à notre connaissance, n'y a encore répondu, et les modèles traditionnels de filtre et de signal sont incapables, par nature, d'y répondre. En effet, les théories du filtre ont été initialement construites dans un contexte non-stochastique. Les diplômes et les titres scolaires servent de filtres parfaits pour les employeurs désireux d'embaucher des travailleurs dans un environnement où l'information est asymétrique. Les individus sont supposés parfaitement connaître leurs capacités productives. Seuls les employeurs font face à une incertitude concernant la productivité de leurs travailleurs potentiels. C'est pourquoi, ils utilisent l'éducation comme filtre d'aptitude. A l'issue du processus d'éducation, l'information est correctement révélée, de sorte que les employeurs connaissent parfaitement la productivité de chaque individu. Ainsi, dans ces modèles, il existe uniquement de l'incertitude ex-ante pour les employeurs. Une fois l'éducation réalisée, le problème d'asymétrie de l'information et l'incertitude initiale sont résolus. De ce fait, la question des effets de l'incertitude dans ce cadre d'analyse n'a pas de sens ; il n'y en a plus.

Aujourd'hui, de nouveaux travaux sont menés dans le domaine de l'imperfection du filtre et des signaux. La notion de filtre imparfait repose sur l'idée que si les employeurs observent parfaitement les niveaux atteints et diplômes obtenus par les étudiants, ils ne peuvent qu'imparfaitement associer ces signaux à des valeurs de productivité. L'information transmise par le système éducatif aux entreprises reste floue. Sur le plan formel, l'hypothèse de filtre imparfait se traduit par le fait que non seulement les firmes n'observent pas directement la productivité des individus (filtre standard), mais également que l'éducation observée par les firmes est différente de la véritable qualification des individus[7]. Dans ce nouveau cadre d'analyse, l'objectif du chercheur est d'étudier l'impact de ces nouvelles formes d'imperfections, liées à l'incertitude des signaux émis par le système éducatif, sur les décisions des agents. Il en résulte que même si l'individu connaît parfaitement son aptitude ou sa qualification, il n'est pas certain qu'il soit identifié correctement par les entreprises à l'issu de son parcours scolaire. Dans ces circonstances, les individus sont amenés à poursuivre davantage leurs études pour affiner leur signalement, quelle que soit leur aptitude initiale. Sous l'hypothèse de filtre imparfait, les distorsions de salaire sont renforcées, de sorte qu'au niveau agrégé le coût social de l'éducation est accentué. Le phénomène de sur-éducation[8] est renforcé à tous les niveaux de scolarité, même pour les moins diplômés.

L'apport de ces extensions théorique à l'analyse du risque reste mineur. En effet les individus ne sont pas confrontés directement au risque, puisqu'ils connaissent parfaitement leurs capacités productives. Il subsiste uniquement une incertitude post scolaire pour les employeurs, à laquelle les individus répondent indirectement en allongeant leur durée de scolarité. Mais les individus ne font face à aucun choix incertain.

[7]Plus précisément, la qualification est généralement définie par le niveau d'éducation atteint plus un choc aléatoire.

[8]C'est-à-dire la poursuite des études au-delà du niveau optimal en l'absence d'asymétrie de l'information.

Qu'il y ait du risque (pour les firmes) ou non, que ce risque soit faible ou fort, que les individus soient averses au risque ou non, la nature des incitations privées est inchangée. Les individus ne courent aucun risque à s'éduquer davantage puisque la qualité du signal est toujours améliorée avec l'éducation. L'individu n'a aucune chance de se tromper et de fournir un mauvais signal en s'éduquant davantage. *in fine*, il y a simplement une translation vers le haut des niveaux d'éducation, car le risque auquel sont confrontés les employeurs agit comme une baisse potentielle du salaire futur et donc du coût d'opportunité de l'éducation pour tous les élèves. De ce point de vue, l'éducation ne fait que répéter les inégalités initiales.

Traiter la question des effets de l'incertitude sur les choix d'éducation des jeunes si l'on admet que l'école peut apporter de l'information sur les capacités des élèves, implique de modifier le cadre standard des théories du filtre et du signal notamment en relâchant l'hypothèse d'asymétrie de l'information. En effet, l'hypothèse d'asymétrie de l'information suppose qu'au moins un des deux agents engagé dans la même transaction dispose d'une information parfaite. En l'occurrence, les individus, à la différence des employeurs, sont supposés parfaitement connaître leurs capacités cognitives, leur productivité et leur salaire[9]. Ainsi, par définition, cette hypothèse ne permet pas d'étudier les choix d'individus qui ne sauraient évaluer parfaitement leur productivité. Par ailleurs, elle n'est pas nécessaire pour mettre en évidence des effets de filtre ou de signal. L'hypothèse d'asymétrie est simplement une condition suffisante. L'imperfection de l'information est une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir considérer l'éducation comme un mécanisme de révélation de l'information. C'est pourquoi nous abandonnons l'hypothèse d'asymétrie au profit de l'hypothèse d'imperfection de l'information. Plus précisément, la spécificité de notre hypothèse de départ est que ni les employeurs, ni les individus ne peuvent évaluer parfaitement leur productivité et leurs salaires futurs à partir de leurs résultats scolaires. Nous réduisons, par conséquent, le cadre d'analyse des effets de l'éducation à un dénominateur

[9]De ce point de vue, l'hypothèse d'asymétrie de l'information entre élèves et employeurs est discutable. Il n'est pas certain que les individus, lorsqu'ils sont encore à l'école, ont une meilleure connaissance du fonctionnement du marché du travail que celle qu'ont les employeurs du système éducatif.

commun, celui de l'imperfection de l'information, ce qui ouvre de nouvelles perspectives de comparaison des effets de capital humain et de filtre dans la dynamique des salaires.

Sur le plan formel, la construction de l'hypothèse d'un double rôle productif et informationnel de l'éducation n'est pas naturelle. Elle implique de sortir de la conception purement financière de l'éducation qu'induit le modèle de capital humain en environnement incertain. Ce n'est pas trivial. En effet, dans le modèle standard, l'éducation est supposée accroître la productivité future du travail d'un individu à travers une production de capital humain, qui est une fonction $f(.)$ du stock de capital humain détenu par l'individu ($K(t)$), du temps consacré à l'éducation (λ), i.e. l'investissement dans le capital humain et de l'efficacité de ce temps (θ). Ce dernier paramètre agrège l'ensemble des facteurs qui déterminent la qualité de l'acquisition des compétences, que sont les capacités cognitives, la qualité des écoles et des enseignants, ainsi que la qualité de l'environnement périscolaire de l'individu. Plus précisément, la productivité future dans le travail est supposée correspondre exactement au montant de capital humain accumulé par l'individu :

$$K(t+\Delta t) = K(t) + f(\theta, \lambda\,(t)\,, K(t)) - \delta K(t) \tag{3.1}$$

Où δ mesure le taux de dépréciation du capital humain.

Lorsqu'il y a de l'incertitude, l'hypothèse de linéarité de la production de capital humain permet d'obtenir une solution intérieure simple au problème de décision individuelle, ce qui n'est pas le cas lorsque l'information est parfaite. En effet, dans le cas certain, l'hypothèse de linéarité conduit à des solutions extrêmes, dites "bang bang", c'est-à-dire des situations d'équilibre où l'individu s'éduque soit perpétuellement soit pas du tout, selon que le rendement du capital humain est au dessus ou en dessous du taux d'intérêt. C'est pourquoi, dans le cas certain, on fait l'hypothèse d'un produit marginal de l'éducation décroissant, car elle assure l'existence d'une solution intérieure unique. L'individu investit dans l'éducation tant que le rendement marginal escompté du capital humain est au dessus du coût. Dès que le rendement marginal du capital humain égalise le taux d'intérêt, l'individu arrête de s'éduquer, travaille et place son épargne sur le marché financier. Ce schéma standard du modèle de capital humain implique qu'un individu en début de scolarité est toujours plus efficace dans son apprentissage qu'à la fin. Or, on sait que le parcours scolaire n'est pas linéaire et que les efforts sont concentrés à des points clés du parcours, notamment aux moments de certification des compétences qui clôturent généralement un cycle scolaire. On peut penser qu'un élève accumule davantage de capital humain l'année du Baccalauréat que l'année de Seconde par exemple. D'ailleurs, au plan empirique, de nombreuses études mettent en évidence la non linéarité des rendements de l'éducation. Les années validées par un diplôme ont souvent un rendement supérieur aux autres. C'est le fameux "effet parchemin", compatible avec l'hypothèse de signal mais aussi avec l'idée que les individus ayant réussi ont accumulé plus de capital humain que ceux qui ont échoué (Riley, 2001) .

En environnement incertain, l'hypothèse de linéarité de la production de capital humain ne conduit pas à un rendement constant de l'éducation. Le rendement évolue avec les aléas qui perturbent ses déterminants. En effet, lorsqu'on passe en incertitude, les déterminants du rendement du capital humain θ et δ ne sont plus des paramètres mais des processus de diffusion, de sorte que le rendement[10] lui même devient un processus stochastique[11] :

$$\frac{dK(t)}{K(t)} = f'_\theta(\theta, \lambda(t)) \left[\mu_\theta dt + \sigma_\theta dZ(t)\right] - \left[\mu_\delta dt + \sigma_\delta dZ(t)\right] \tag{3.2}$$

L'éducation, à travers la fonction $f'_\theta(\theta, \lambda(t))$, interagit de manière multiplicative avec le processus de Wiener décrivant l'évolution de θ : $\mu_\theta dt + \sigma_\theta dZ(t)$. Ainsi, l'hypothèse standard que l'éducation accroît la productivité $\partial f(\theta, \lambda(t), K(t))/\partial\lambda$, se traduit, dans le cas où l'efficacité de l'investissement dans le capital humain est supposée

[10]C'est-à-dire le taux de croissance de la productivité.

[11]Le chapitre précédent expose en détail la dérivation du modèle certain au cas incertain.

incertaine, par un effet de l'éducation distribué non seulement sur la moyenne mais également sur la volatilité du taux de croissance de la productivité : En effet,

$$\frac{dK(t)}{K(t)} = [\mu_\theta f'_\theta(\theta, \lambda(t)) - \mu_\delta]\, dt + [\sigma_\theta f'_\theta(\theta, \lambda(t)) - \sigma_\delta]'\, dZ(t) \tag{3.3}$$

Le premier terme à droite du signe égal représente la moyenne du rendement et le second terme mesure sa volatilité. Quelle que soit la combinaison de l'éducation et de son efficacité à travers la fonction $f(\theta, \lambda(t))$, l'éducation augmente exactement dans la même proportion ($f''_{\theta\lambda}(\theta, \lambda(t)) > 0$) le rendement moyen et la volatilité, c'est-à-dire le risque sur la rentabilité future du capital humain :

$$\frac{\partial \left[\frac{dK(t)}{K(t)}\right]}{\partial \lambda} = \mu_\theta f''_{\theta\lambda}(\theta, \lambda(t))dt + f''_{\theta\lambda}(\theta, \lambda(t))\sigma'_\theta dZ(t) \tag{3.4}$$

Si l'éducation accroît le salaire moyen futur, elle expose également davantage l'individu à un risque élevé. C'est un résultat central de la théorie du capital humain en incertitude, obtenu à partir de processus complètement généraux[12]. C'est pourquoi, par abus de langage, nous avons qualifié l'éducation d'"actif risqué" dans le chapitre précédent[13].

Dans ce cadre, l'éducation ne peut être envisagée comme un dispositif qui fournit de l'information sur les caractéristiques productives des individus. Au contraire, le modèle de capital humain implique qu'au fur et à mesure que l'individu s'éduque, il

[12]Nous rappelons que parmi les processus d'Itô, le processus de Wiener, appelé aussi mouvement brownien, est sans doute le processus stochastique le plus utilisé dans toutes les sciences, pour les mêmes raisons que la loi normale l'est en statistique. Lorsqu'un phénomène aléatoire quelconque résulte de l'addition d'un grand nombre de causes indépendantes, sa mesure suivra une loi normale du fait du théorème central-limite. C'est le cas par exemple lorsqu'on suppose la normalité des rendements d'un actif ; en introduisant la dimension temporelle, le rendement sera supposé suivre un processus de Wiener.

[13]En fait, comme l'avaient déjà noté Levhari et Weiss (1974), l'éducation apparait même plus risquée qu'un portefeuille standard d'actifs financiers, puisque le risque global d'un portefeuille est indépendant du montant investi. Il dépend uniquement de la structure du portefeuille, c'est-à-dire de la combinaison des différents actifs financiers qui le composent. Par contre, l'acquisition de capital humain est en grande partie irréversible. Le capital humain ne peut être emprunté ou prêté librement sur un marché. Il est inséparable de son détenteur. Voilà pourquoi le rendement du capital humain dépend de la quantité investie par l'individu.

connaît de moins en moins bien sa véritable productivité. Ici, à l'inverse de l'idée de filtre ou de signal, en accentuant l'incertitude existant a priori sur la productivité individuelle, l'éducation détériore la qualité de l'information. Il faut par conséquent sortir du modèle "pur" de capital humain si l'on veut intégrer des effets informationnels.

La façon la plus simple de prendre en compte la double dimension productive et informationnelle de l'éducation est synthétisée par le processus stochastique suivant décrivant l'évolution de la productivité individuelle :

$$\frac{dQ\left(t\right)}{Q\left(t\right)} = \mu_{\theta}\lambda\left(t\right)dt + \left(1-\lambda\left(t\right)\right)\sigma_{\theta}'dZ\left(t\right) \tag{3.5}$$

Pour bien nous démarquer formellement de la version pure du modèle capital humain, nous appelons $Q\left(t\right)$ le niveau de la productivité individuelle (en volume). Nous supposons que la productivité individuelle dépend de l'éducation $\lambda\left(t\right)$ ainsi que l'ensemble des facteurs individuels et collectifs, agrégés par la variable $\theta(t)$, qui conditionnent l'efficacité de l'éducation[14]. Pour simplifier l'exposé, nous supposons que l'efficacité de l'éducation $(\theta(t))$ ne dépend que des capacités cognitives individuelles. Il en résulte que, dans ce modèle, la productivité future d'un individu dépend uniquement, de son niveau d'éducation et de ses aptitudes exogènes[15].

Dans ce modèle la productivité évolue de manière stochastique là encore à cause de l'incertitude portant sur les capacités cognitives. En effet, les individus ne connaissent pas leurs capacités. Ils disposent simplement d'indications sur leur distribution. Ils sont supposés connaître leur capacité moyenne (μ_{θ}) et leur écart type (σ_{θ}). Cette structure stochastique de la productivité future implique que deux individus ayant le même niveau d'éducation peuvent avoir une productivité et un salaire futur différents car ils possèdent des capacité cognitives moyennes (μ_{θ}) différentes. En particulier, plus l'individu possède des capacités cognitives élevées (en moyenne), et plus sa productivité future sera forte. Cette équation indique aussi que deux individus ayant un niveau d'éducation identique et des capacités cognitives moyennes identiques, peuvent

[14]C'est-à-dire de la capacité de l'éducation à accroitre la productivité future.

[15]Supposées innées ou acquises à l'extérieur du système de formation.

avoir une productivité et des salaires différents dans l'avenir s'ils font face à un risque de capacité (σ_θ^2) différent. Par exemple, un des deux individus a plus de chance que l'autre : il réussit ses examens alors que l'autre échoue. La productivité future est par conséquent d'autant plus risquée que les capacités cognitives individuelles sont incertaines. Ainsi, autant que la moyenne, la variance des capacités cognitives influence la productivité future, et par conséquent, les choix d'éducation qui vont être pris.

Plus précisément, l'équation ci-dessus établit que l'éducation augmente la productivité moyenne future de l'individu $(\mu_\theta \lambda(t)\, dt)$[16], comme dans le modèle précédent. Nous qualifions cet effet de l'éducation sur la moyenne d'effet "capital humain". Cet effet est d'autant plus fort que l'efficacité moyenne de l'apprentissage (μ_θ) est élevé. Deux individus ayant le même niveau de scolarité n'ont pas forcément le même niveau de capital humain et donc les mêmes salaires. Les individus ayant une aptitude plus forte que les autres accumulent davantage de capital humain en allouant exactement les mêmes ressources à l'éducation. Il convient de rappeler ici que le niveau d'éducation ne suffit pas à caractériser pleinement le capital humain et la productivité individuelle. Il en constitue le déterminant essentiel, mais le niveau d'éducation n'est pas le niveau de capital humain. Les capacités cognitives, outre leur effet positif sur le niveau d'éducation, influencent directement la productivité et les salaires. Cette structure de l'effet capital humain prédite par ce modèle est très bien captée empiriquement aujourd'hui par les techniques modernes notamment celles de l'économétrie des données de panel. L'évidence d'un biais d'endogénéité de l'éducation significativement positif atteste de ce double effet, direct et indirect, des caractéristiques non observées sur les salaires (en moyenne).

L'apport essentiel de notre hypothèse concerne l'effet de l'éducation sur la volatilité du taux de croissance de la productivité individuelle. Contrairement au modèle du chapitre précédent, l'éducation ici réduit la volatilité, c'est-à-dire le risque qui

[16] $E_t\left[\frac{dQ(t)}{Q(t)}\right] = \mu_\theta \lambda(t)\, dt$, puisque $E_t[dZ(t)] = 0$, par définition du processus de Wiener standard.

affecte l'évolution de la productivité[17]. C'est cet effet que nous qualifions d'effet informationnel, au sens de l'hypothèse de filtre et de signal. En effet, la réduction de la variance est équivalente à une production d'information sur la véritable productivité individuelle. Au fur et à mesure que l'individu s'éduque, sa productivité future se rapproche de sa valeur moyenne. En d'autres termes, les anticipations sur le niveau de productivité futur deviennent de plus en plus précises au fur et à mesure que l'individu s'éduque : il a de moins en moins de chance de se tromper dans l'évaluation de sa véritable capacité productive. En particulier, dans le cas où l'individu consacre tout son temps disponible à l'éducation ($\lambda = 1$), la variance tend vers zéro : le risque disparait, de sorte que la productivité future est parfaitement connue. Elle est égale à μ_θ, la valeur moyenne des aptitudes cognitives de l'individu. A l'inverse si l'individu ne s'éduque pas, sa productivité moyenne n'augmente pas. Elle évolue de manière purement stochastique au gré des chocs affectant les capacités cognitives. Dans ce cas, le risque est maximal. Ainsi, comme le supposent les modèles de filtre et de signal, l'éducation améliore ici l'information sur la véritable productivité individuelle. Notre formulation explicite du processus de révélation de l'information dans un cadre dynamique est proche du dispositif de filtre éducatif décrit par Stiglitz (1975). Ce dernier définit le mécanisme de filtrage par une relation négative entre l'éducation et la probabilité d'erreur dans l'évaluation de la productivité individuelle. Notre hypothèse informationnelle peut être vue comme une application au cadre dynamique du principe énoncé par Stiglitz (1975) dans un cadre statique.

Jusqu'ici nous avons supposé que la productivité dépendait uniquement de caractéristiques individuelles. En particulier, nous avons considéré que l'incertitude sur la productivité future était simplement le reflet de l'incertitude portant sur les aptitudes individuelles. L'objectif étant de présenter de manière simple les principes sous-jacents à notre hypothèse d'un double effet de l'éducation sur la productivité future, car elle

[17] En effet $Var\left[\frac{dQ(t)}{Q(t)}\right] = E_t\left[\frac{dQ(t)}{Q(t)} - E_t\left(\frac{dQ(t)}{Q(t)}\right)\right]^2 = \left[\left(1-\lambda\left(t\right)\right)\sigma_\theta\right]^2 dt$, puisque $dt^2 = dZ\left(t\right)dt = o(dt)$ et $\left[dZ\left(t\right)\right]^2 = dt + o(dt)$, par définition du processus de Wiener standard. D'où $\frac{\partial Var\left[\frac{dQ(t)}{Q(t)}\right]}{\partial\lambda} < 0$

affecte en profondeur les stratégies habituelles des individus face au risque. Bien sûr, d'autres facteurs, largement extérieurs au contrôle de l'individu, influencent l'évolution de la productivité. Au moins deux types de facteurs peuvent affecter le volume et la valeur de la productivité. Premièrement, le progrès technique, par nature, rend obsolète une partie des compétences existantes et en requiert de nouvelles. Si l'individu ne compense pas cette obsolescence par de la formation supplémentaire, son niveau de productivité en volume est réduit. Il est possible, comme dans le modèle du chapitre précédent, de prendre en compte ce phénomène en intégrant au modèle un paramètre δ, mesurant le taux de dépréciation des compétences productives. Lorsque l'on suppose que l'individu ne connaît pas parfaitement les proportions dans lesquelles ses compétences se déprécient[18], l'application du lemme d'Itô à l'équation (3.5) donne l'évolution du volume de la productivité individuelle suivante :

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = [\mu_\theta \lambda(t) - \mu_\delta] \, dt + [(1-\lambda(t)) \, \sigma_\theta - \sigma_\delta]' \, dZ(t) \tag{3.6}$$

D'une manière générale, la dépréciation des compétences réduit la productivité nette de l'individu. Un choc technologique peut affecter la moyenne ou la dispersion de la productivité future. Si un choc technologique accroît la dépréciation moyenne, il réduit dans les mêmes proportions la productivité moyenne future[19]. Par contre une dispersion plus élevée de la dépréciation accroît la dispersion globale de la productivité future[20]. Si l'éducation accroît toujours la productivité brute, il n'est pas certain qu'elle augmente la productivité nette. En présence d'une dépréciation des compétences, l'augmentation de la productivité nette nécessite un investissement dans la formation plus important. Il est souvent mis en évidence en France que la formation continue n'a que peu, voire pas, d'impact significatif sur les salaires (*cf.* Hanchane et Stankiewicz, 2004). Le modèle de capital humain apporte une des réponses possibles

[18]On suppose que le taux de dépréciation suit un processus de Wiener.

[19]En effet si $\mu_\delta \nearrow$, alors $E_t\left[\frac{dQ(t)}{Q(t)}\right] = [\mu_\theta \lambda(t) - \mu_\delta] \, dt \searrow$.

[20]En effet $Var\left[\frac{dQ(t)}{Q(t)}\right] = [((1-\lambda(t)) \, \sigma_\theta - \sigma_\delta) \, dZ(t)]^2 = (1-\lambda(t))^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_\delta^2 - 2(1-\lambda(t)) \, \sigma_\theta' \sigma_\delta$. D'où $\frac{\partial Var\left[\frac{dQ(t)}{Q(t)}\right]}{\partial \sigma_\delta} > 0$, puisque $\sigma_\theta' \sigma_\delta < 0$ par hypothèse.

à ce phénomène. Si la formation continue a simplement pour objectif d'entretenir les compétences existantes, le salaire n'augmente pas. Quel que soit son type, une formation ne peut se traduire par un impact positif sur le salaire que si elle génère un gain de productivité marginal net positif.

Une dernière source d'incertitude pouvant affecter les salaires futurs concerne la valeur de la productivité sur le marché du travail. Jusqu'ici, nous avons décrit les facteurs pouvant influencer le volume des compétences productives. Or, dans une économie néo-classique, le salaire unitaire (horaire) perçu par l'individu est égal à la valeur de sa productivité marginale et non au stock de ses compétences. Si l'on pose que la valeur de la productivité individuelle $q(t)$ est égale au produit du volume de la productivité $Q(t)$ et de son prix unitaire fixé par le marché (ω) : $q(t) = \omega Q(t)$, dans une économie où la concurrence est pure et parfaite, l'évolution du salaire ne dépend que de l'évolution du volume de la productivité $dq(t) = d\left(\omega Q(t)\right) = dQ(t)$. Le prix des compétences étant fixé par le marché, il n'intervient pas dans l'évolution de la productivité. En situation d'information imparfaite sur la valeur marchande de la productivité individuelle, cette conclusion n'est plus valide, puisque le prix des compétences n'est plus constant : $\omega\left(t\right) \neq \omega\left(t + dt\right)$. Le salaire horaire évolue non seulement en fonction de la productivité réelle de l'individu mais également en fonction de son prix.

Cette dernière source d'incertitude est fondée sur l'idée qu'il peut être difficile pour les individus d'associer une valeur marchande à leur niveau d'éducation. Admettons que l'individu connaisse parfaitement la combinaison de son niveau d'éducation, de ses capacités cognitives ainsi que la dépréciation de ses compétences. Autrement dit, supposons que l'individu connaisse parfaitement sa productivité réelle future à l'issue de son parcours de formation. Pour connaître la distribution de ses salaires futurs, il faut que l'individu connaisse la valeur de sa productivité, c'est-à-dire le prix que le marché attribue à ses compétences. On peut penser qu'au moment où l'individu prend ses décisions d'éducation, les conditions d'offre et de demande futures sur le marché du travail ne sont pas parfaitement maîtrisées par l'individu. Si l'on suppose que la valeur des compétences est déterminée de façon compétitive à l'issue de la confrontation de l'offre et de la demande, les compétences relativement rares ou demandées par les firmes seront bien valorisées, alors que les compétences en excès d'offre seront dévalorisées. Ainsi, deux individus ayant la même productivité peuvent percevoir des salaires différents car ils travaillent dans des secteurs d'activité ou tout simplement dans des entreprises qui valorisent les compétences de manière différente.

Formellement, si l'on suppose que le prix des compétences évolue selon un mouvement brownien géométrique[21] de la forme $d\omega(t) = \omega(t)\left[\mu_\omega dt + \sigma_\omega dZ(t)\right]$, l'évolution de la valeur de la productivité future s'écrira d'après le lemme d'Itô :

$$\frac{dq\,(t)}{q\,(t)} = \left[\mu_\omega + \mu_\theta \lambda\,(t) + (1-\lambda\,(t))\,\sigma'_\theta \sigma_\omega - \mu_\delta - \sigma'_\omega \sigma_\delta\right] dt + \left[\sigma_\omega + (1-\lambda\,(t))\,\sigma_\theta - \sigma_\delta\right]' dZ\,(t) \tag{3.7}$$

Clairement, une augmentation de la valeur unitaire moyenne des compétences ($\mu_\omega > 0$) accroît la valeur moyenne de la productivité c'est-à-dire le salaire horaire futur. De même, la variabilité des salaires futurs sera d'autant plus forte que la variabilité de la valeur unitaire des compétences (σ_ω) sera élevée. Ce type d'incertitude peut être interprété au plan individuel comme une forme de déclassement salarial, si l'on suppose au préalable que le marché tend à dévaloriser plutôt que valoriser les compétences existantes ($\mu_\omega < 0$). Ainsi, un individu peut entrer sur le marché du travail avec un diplôme qui a finalement peu de valeur. Cette hypothèse est d'autant plus probable que d'une part, l'évaluation de la valeur marchande future de la productivité est difficile à établir par l'individu au moment où il prend ses décisions d'éducation, et d'autre part que l'éducation est un processus quasiment irréversible. Les compétences détenues par un individu ne peuvent être échangés librement au gré des évolutions

[21] D'après le lemme d'Itô, une variable aléatoire qui suit une loi log-normale dans un modèle discret, suit un mouvement brownien géométrique dans un modèle dynamique en temps continu. Ainsi, comme la loi log-normale, le mouvement brownien géométrique est définit uniquement pour les valeurs positives de la variable aléatoire. Il est par conséquent bien adapté à la description d'un prix.

du marché du travail. Il semble que cette tendance sur le marché du travail soit plutôt confirmée par les faits, notamment en début de vie active. Cette interprétation est sans doute valide pour les niveaux d'éducation intermédiaires et supérieurs mais pas pour les bas niveaux de qualification, pour lesquels il existe des minimas pour le salaire qui empêchent l'ajustement à la baisse des salaires. Dans ce cas, l'individu ne peut être déclassé puisque son salaire est rigide à la baisse. Notons enfin que même si la valeur moyenne des compétences reste constante dans le temps : $\mu_{\omega} > 0$, le salaire futur moyen augmente avec le risque portant sur la valeur future des compétences à cause de la corrélation positive entre l'aptitude et la valeur des compétences. Cet effet est de la même nature que celui mis en évidence dans le chapitre précédent : les individus les plus aptes parviennent à trouver un emploi qui correspond davantage à leur niveau de compétences. Cependant, la grande différence avec le modèle du chapitre précédent, c'est le rôle de l'éducation qui au lieu d'amplifier cet impact, le réduit ici. C'est la conséquence directe de notre hypothèse de filtre/signal : au fur et à mesure que l'individu s'éduque, la productivité devient de moins en moins aléatoire ; les individus ont de moins en moins de chances de se tromper dans l'évaluation de leur productivité future, de sorte que les aléas et leurs liens (les covariances) ont de moins en moins de poids dans la dynamique de la productivité individuelle. A travers son rôle informationnel décrit plus haut, l'éducation réduit l'exposition de l'individu au risque *ex post*, c'est-à-dire au risque post scolaire. Cette implication directe de notre hypothèse d'effets informationnels est au coeur de l'interprétation des résultats originaux de notre modèle décrit dans la section suivante.

3.3. Investissement optimal en éducation et risques

L'idée que les individus les plus diplômés gagnent mieux que les autres en moyenne, est un résultat standard de la théorie du capital humain et des théories du tri. Celui-ci provient de l'arbitrage entre revenu courant et revenu futur que réalise l'individu au moment de prendre ses décisions en matière d'éducation. Lorsqu'il décide de poursuivre ses études, l'individu renonce au salaire qu'il percevrait en travaillant immédiatement, dans l'espoir d'obtenir un salaire plus élevé dans le futur.

Dans le cas certain où l'individu est supposé parfaitement connaître le futur, cet arbitrage ne pose pas de problème particulier. Tant que le rendement escompté du capital humain est positif, l'individu poursuit son investissement. Lorsque le rendement marginal du capital humain égalise le taux d'intérêt, il devient alors plus rentable pour l'individu de travailler et placer son salaire sur le marché financier.

En environnement incertain, cet arbitrage est beaucoup plus complexe, car il repose sur une double confrontation. L'individu doit d'une part construire un portefeuille d'actif financiers, en fonction du prix, de la rentabilité escomptée et du risque associé à chaque actif, et d'autre part comparer le rendement espéré de ce portefeuille à celui du capital humain. Le tout dans un contexte où l'individu observe parfaitement les valeurs courantes mais ne connaît pas les valeurs futures de ces rendements.

Cet ensemble de contraintes est inscrit dans le programme de maximisation que réalise l'individu sur son cycle de vie. Nous commençons par présenter la résolution du modèle dans un cadre complètement général.

3.3.1. Solution générale

L'objectif d'un individu représentatif est de maximiser son espérance d'utilité sur l'ensemble de son cycle de vie sous les contraintes dynamiques de productivité et de budget :

$$Max\ E_t \int_t^T e^{-\rho(s-t)} u\left[c\left(s\right), l\left(s\right)\right] ds \tag{3.8}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned}
\frac{dq}{q} &= \left[\mu_\omega + \mu_\theta \lambda - \mu_\delta + (1-\lambda)\,\sigma'_\theta \sigma_\omega - \sigma'_\delta \sigma_\omega\right] dt + \left[\sigma_\omega + (1-\lambda)\,\sigma_\theta - \sigma_\delta\right]' dZ \\
dW &= \left[rW + (1-\lambda-l)\,q - c + WX\,(\mu - r)\right] dt + WX\sigma'_s dZ \\
\text{et } c &\geqslant 0,\ 0 \leqslant \lambda, l \leqslant 1
\end{aligned}$$

Ce programme de maximisation est quasiment identique à celui établi dans le chapitre précédent. En particulier, la contrainte d'accumulation de richesse financière, qui est la contrainte de budget intertemporelle, est identique à celle du chapitre précédent[22]. Seule la contrainte décrivant l'évolution de la productivité, qui stipule qu'un individu ne peut espérer toucher un salaire supérieur à la valeur de sa productivité sur le marché du travail, est différente. Nous avons expliqué en détail, dans la section 3.2.3 de ce chapitre, comment l'acquisition d'information à travers l'éducation affectait la dynamique de la productivité individuelle. L'objectif premier de cette section est d'étudier les implications de la prise en compte de ce type d'effet, que nous avons qualifié de filtrage ou de signal, sur la relation éducation-risque.

Nous reportons uniquement le résultat concernant la demande optimale d'éducation. Les autres solutions optimales sont identiques à celles du chapitre précédent.

La demande optimale d'éducation est calculée à partir de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman équivalente au programme (3.8) ci-dessus : Si l'on suppose que les capacités cognitives sont non corrélées avec le rendement des actifs financiers risqués ($\sigma'_\theta \sigma_s = 0$), la demande optimale d'éducation est de la forme suivante :

$$\lambda^* = -\frac{V_q}{V_{qq} q} \frac{\mu_\theta - \sigma'_\theta \sigma_\omega - \frac{V_W}{V_q}}{\sigma'_\theta \sigma_\theta} + \frac{\sigma'_\theta \sigma_\omega + \sigma'_\theta \sigma_\theta - \sigma'_\theta \sigma_\delta}{\sigma'_\theta \sigma_\theta} + \frac{V_{qY}}{V_{qq} q} \frac{\sigma'_\theta \sigma_Y}{\sigma'_\theta \sigma_\theta} \tag{3.9}$$

Nous constatons qu'à l'optimum, la structure de la demande d'éducation est identique au cas où l'éducation est modélisée comme un actif risqué. Elle est constituée

[22]Pour alléger l'exposé nous renvoyons le lecteur au chapitre précédent pour plus de détail sur la construction de cette contrainte.

d'une composante spéculative et de deux composantes de couverture : une composante "variance minimale", qui couvre le risque affectant la valeur de la productivité et une couverture intertemporelle contre les risques exogènes de type macroéconomiques. Par contre, l'effet de ces différentes composantes est opposé au modèle du chapitre précédent. En particulier, les composantes de couverture contre le risque ont un impact positif sur la demande optimale d'éducation. Cela signifie que pour se protéger des risques l'individu va accroître son niveau d'éducation. Ce résultat central est la conséquence directe de la prise en compte dans le modèle du rôle de signal fourni par le système de formation : en produisant de l'information sur les capacités cognitives non-observables a priori, l'éducation réduit le risque ex-post. Dans ce cas, l'éducation agit comme une assurance. Il est important de noter que ce résultat tout à fait singulier est obtenu dans un cadre complètement général du point de vue des préférences individuelles et des processus stochastiques utilisés. Plus précisément, ce résultat est vrai pour toutes préférences de type Von Neuman - Mortensen c'est-à-dire pour toute fonction d'utilité croissante concave en chacun des arguments, exhibant de l'aversion au risque pour l'individu. Ce résultat est également valide quels que soient les processus d'Itô utilisés pour décrire les trajectoires des variables aléatoires. Cependant, comme dans le chapitre précédent, on ne peut pas, dans le cas général, obtenir de solutions explicites au problème d'optimisation, ni isoler l'effet des différentes sources d'incertitude. Pour bien expliciter les stratégies spéculatives et les stratégies de couverture des risques, il faut caractériser les préférences individuelles.

Dans la section qui suit, nous évaluons la demande optimale d'éducation dans le cas de préférences logarithmiques. Nous nous concentrons également sur l'effet d'une variable d'état particulière : le taux de chômage.

3.3.2. Solution explicite : préférences logarithmiques et incertitude sur le taux de chômage

Avant d'expliciter les préférences individuelles, nous commençons par simplifier le vecteur de variables d'état suceptibles d'influencer la dynamique du rendement de l'éducation au cours du cycle de vie. Nous réduisons ce vecteur à une seule variable exogène : le taux de chômage futur. Ce taux de chômage futur est modélisé comme dans le chapitre précédent, à savoir comme la partie du temps disponible[23] qui n'est pas travaillée et qui n'est pas consacré à l'éducation[24]. Le revenu courant du travail, qui est le produit du temps travaillé et de la valeur de la productivité horaire du travail, peut alors s'écrire $y(t) = (1 - \lambda(t) - u(t))\, q(t)$. Si le taux de chômage courant dans l'économie est parfaitement observé par l'individu, le taux de chômage futur est, par hypothèse, inconnu au moment où l'individu effectue ses choix. Nous supposons que ce dernier évolue selon un processus de Wiener ($du(t) = \mu_u dt - \sigma_u' dZ(t)$), de sorte que la contrainte intertemporelle de budget est transformé de la manière suivante :

$$dW = [rW + (1 - \lambda - \mu_u)\, q - c + WX\,(\mu - r)]\, dt + (WX\sigma_s' - \sigma_u)'\, dZ \qquad (3.10)$$

[23] Normalisé à 1.

[24] Nous renvoyons le lecteur à la discussion du chapitre précédent sur les différentes façons d'introduire le chômage dans le modèle.

Partant, la demande optimale d'éducation nouvellement obtenue dans le cadre général s'écrit[25]

$$\lambda^* = -\frac{V_q}{V_{qq}q}\frac{\mu_\theta - \sigma'_\theta\sigma_\omega - \frac{V_W}{V_q}}{\sigma^2_\theta} + \frac{\sigma_\theta\sigma_\omega + \sigma^2_\theta - \sigma_\theta\sigma_\delta}{\sigma^2_\theta} + \left(\frac{V_{qu}}{V_{qq}q} - \frac{V_{qW}}{V_{qq}}\right)\frac{\sigma'_\theta\sigma_u}{\sigma^2_\theta} \quad (3.12)$$

Si l'on suppose que les préférences individuelles sont décrites par une fonction d'utilité de type logarithmique, la fonction valeur sera, d'après la propriété d'homothétie, de la forme $V(q,t,W,u,T) = A(t,T)ln[B(t,T)q\,(t) + W\,(t) - C(t,T)u\,(t)]$. Il suffit alors de remplacer les dérivées partielles de la fonction valeur dans la demande optimale d'éducation (3.12), pour obtenir la solution explicite :

$$\lambda^* = \frac{B(t,T)q(t) + W(t) - C(t,T)u(t)}{B(t,T)q(t)}\frac{\mu_\theta - \sigma'_\theta\sigma_\omega - \frac{1}{B(t,T)}}{\sigma^2_\theta} + \frac{\sigma_\theta\sigma_\omega + \sigma^2_\theta - \sigma_\theta\sigma_\delta}{\sigma^2_\theta} - \frac{q(t) + C(t,T)}{B(t,T)q(t)}\frac{\sigma'_\theta\sigma_u}{\sigma^2_\theta}$$

Pour étudier l'effet des risques sur la demande optimale d'éducation, il est utile de réécrire les covariances, à partir de la définition $\sigma'_i\sigma_j = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$. Les indices de temps sont supprimés pour alléger l'écriture.

$$\lambda^* = \frac{Bq + W - Cu}{Bq}\frac{\mu_\theta - \rho_{\theta\omega}\sigma_\theta\sigma_\omega - \frac{1}{B}}{\sigma^2_\theta} + \frac{\rho_{\theta\omega}\sigma_\theta\sigma_\omega + \sigma^2_\theta - \rho_{\theta\delta}\sigma_\theta\sigma_\delta}{\sigma^2_\theta} - \frac{q + C}{Bq}\frac{\rho_{\theta u}\sigma_\theta\sigma_u}{\sigma^2_\theta} \quad (3.13)$$

[25]A partir de la nouvelle équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman ci dessous et de l'hypothèse $\rho_{\theta s} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 \equiv\ & Max\ \{u\,[c,l] + V_q\,[\mu_\theta\lambda - \mu_\delta + \mu_\omega + (1-\lambda)\,\sigma'_\theta\sigma_\omega - \sigma'_\delta\sigma_\omega]\,q \\ & + V_W\,[rW + (1-\lambda-l-\mu_u)\,q - c + WX\,(\mu - r) - qWX\sigma'_s\sigma_u] \\ & + \frac{1}{2}V_{WW}\,[WX\sigma_s - q\sigma_u]'\,[WX\sigma_s - \sigma_u] + \frac{1}{2}V_{qq}\,[\sigma_\omega + (1-\lambda)\,\sigma_\theta - \sigma_\delta]'\,[\sigma_\omega + (1-\lambda)\,\sigma_\theta - \sigma_\delta]\,q^2 \\ & + V'_u\mu_u + \frac{1}{2}V_u\sigma'_u\sigma_u + V_{Wu}\,(WX\sigma_s - q\sigma_u)'\,\sigma_u + V_{qW}q\,[\sigma_\omega + (1-\lambda)\,\sigma_\theta - \sigma_\delta]'\,[WX\sigma_s - q\sigma_u] \\ & + V_{qu}q\,[\sigma_\omega + (1-\lambda)\,\sigma_\theta - \sigma_\delta]'\,\sigma_u - \rho V + V_t\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Proposition : *Lorsqu'on admet que l'éducation produit non seulement du capital humain mais également de l'information sur les capacités individuelles, l'effet des risques sur la demande optimale d'éducation est opposée au cas où l'éducation est simplement considérée comme un investissement risqué. Tous les risques ont un impact positif excepté le risque concernant la valeur de la productivité sur le marché du travail (σ_ω) qui exerce un effet négatif sur la demande optimale d'éducation.*

Preuve : Un choc de progrès technique, qui aurait pour conséquence d'augmenter le risque de dépréciation, est couvert par une hausse de la demande d'éducation :
$\frac{d\lambda^*}{d\sigma_\delta} = -\frac{\rho_{\theta\delta}}{\sigma_\theta} > 0$ puisque $\rho_{\theta\delta} < 0$: les individus les plus aptes ont des compétences qui se déprécient moins vite que les individus moins doués.

De même, face à une augmentation du risque de chômage, l'individu augmente sa demande d'éducation :
$\frac{d\lambda^*}{d\sigma_u} = -\frac{q+C}{Bq}\frac{\rho_{u\theta}}{\sigma_\theta} > 0$ puisque $\rho_{u\theta} < 0$: les individus les plus aptes sont moins exposés au chômage que les individus moins doués.

Si le risque sur les capacités cognitives augmente, alors l'individu va également accroître son niveau d'éducation
$\frac{d\lambda^*}{d\sigma_\theta} = \frac{1}{\sigma_\theta}(1-\lambda^*) - \frac{1}{\sigma_\theta}\frac{W+Bq-Cu}{Bq}\frac{\mu_\theta - \frac{1}{B}}{\sigma_\theta^2} > 0$ si $\mu_\theta - \frac{1}{B} < 0$, ce qui est le cas dans notre modèle puisque la prime de risque doit être négative pour que la demande optimale d'éducation soit définie ($\lambda^* \in [0,1]$). Pour le démontrer simplement, imaginons que la valeur de la productivité ne soit pas corrélée avec les capacités cognitives. Dans ce cas, on obtiendrait :

$$\lambda^* = \frac{Bq+W-Cu}{Bq}\frac{\mu_\theta - \frac{1}{B}}{\sigma_\theta^2} + \frac{-\rho_{\theta\delta}\sigma_\theta\sigma_\delta}{\sigma_\theta^2} + 1 - \frac{q+C}{Bq}\frac{\rho_{\theta u}\sigma_\theta\sigma_u}{\sigma_\theta^2}$$

$\lambda^* \in [0;1]$ implique nécessairement que $\mu_\theta - \frac{1}{B} < 0$

Enfin, l'effet du risque sur le prix des compétences est également inversé par rapport au chapitre précédent. Il est négatif :

$\frac{d\lambda^*}{d\sigma_\omega} = \frac{\rho_{\theta\omega}}{\sigma_\theta}\left[1 - \frac{Bq+W-Cu}{Bq}\right] < 0$

Interprétation : La demande optimale d'éducation est définie par trois composantes :

- Une composante spéculative : le premier terme du membre de droite, constitué de l'indice de tolérance au risque[26] $\left(\frac{Bq+W-Cu}{Bq}\right)$ et du surplus de rendement attendu de la prise de risque $\left(\frac{\mu_\theta - \rho_{\theta\omega}\sigma_\theta\sigma_\omega - \frac{1}{B}}{\sigma_\theta^2}\right)$.
- Deux composantes de couverture : une composante "variance minimale" (le second terme à droite), qui représente la couverture contre les risques affectant la productivité, et une composante de couverture intertemporelle contre le risque de chômage (le dernier terme).

A l'inverse de la logique décrite dans le chapitre précédent, la composante spéculative est de signe négatif. En effet, comme nous venons de le démontrer, une condition nécessaire pour que la demande optimale d'éducation soit définie ($\lambda^* \in [0,1]$) est que la prime de risque soit négative $\left(\mu_\theta - \frac{1}{B} < 0\right)$. Cela signifie qu'un individu entreprenant un choix risqué, au lieu d'espérer un excès de rendement, va escompter une perte spéculative. C'est la contrepartie de l'effet de couverture positif dans ce modèle. En effet, les composantes de couverture sont de signe positif. Cela signifie que face à un risque accru, l'individu se protège en s'éduquant davantage. Ainsi le dilemme auquel est confronté l'individu face au risque est strictement inversé par rapport à celui établi dans le chapitre précédent. D'un côté, l'individu est incité à réduire son investissement dans l'éducation pour limiter sa perte spéculative. De l'autre, l'individu est incité à accroître son niveau d'éducation pour se protéger du risque : pour le réduire. Cet arbitrage est parfaitement illustré par l'effet du risque sur la valeur marchande de la productivité (σ_ω) : l'effet de couverture contre le risque est positif mais insuffisant pour compenser l'effet négatif de spéculation. Autrement dit, le prix à payer pour se protéger du risque est trop élevé, de sorte que l'individu réduit sa demande d'éducation. C'est exactement l'effet inverse qui se produit lorsque le risque

[26]Définit comme l'inverse de l'aversion au risque.

portant sur les capacités cognitives (σ_θ) augmente : l'individu augmente sa demande optimale d'éducation car la couverture contre ce risque produite par l'éducation compense nettement la perte spéculative associée. Le risque de dépréciation (σ_δ) et le risque de chômage (σ_u) apparaissent uniquement dans les composantes de couverture, respectivement dans la composante "variance minimale" et dans la composante de couverture intertemporelle. C'est pourquoi leur impact est strictement positif. A travers son rôle informationnel, l'éducation réduit l'exposition aux risques futurs, de sorte que face à un risque accru, l'individu va se protéger en s'éduquant davantage. Ce comportement des individus supposés averses au risque est totalement singulier. Pour la première fois, il est possible de montrer que face à un choix risqué, un individu investira d'autant plus que son aversion pour le risque est forte. Le couple perte spéculative/protection face au risque qui résulte de notre modèle reflète sûrement la nature singulière de l'investissement dans l'éducation par rapport à l'investissement dans le capital financier.

3.3.3. Extension : Efficacité du signal différenciée

Nous avons supposé jusqu'ici que l'éducation produisait un signal de productivité homogène. Nous considérons dans cette section la possibilité de signaux différenciés selon le type de parcours de formation choisi par l'individu. Cette section s'inscrit dans la littérature qui traite de l'imperfection du filtre et du signal. Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre (section 3.2.2), la notion de filtre ou de signal imparfait repose sur l'idée que les titres scolaires n'identifient qu'imparfaitement la véritable aptitude des individus. A l'issue d'un parcours de formation, l'information transmise par le niveau d'étude atteint ou le diplôme obtenu par l'individu ne peut être associée à une valeur précise de la productivité. Dans ce cadre d'analyse, notre objectif est d'étudier l'impact de ces nouvelles formes d'imperfections liées à l'incertitude des signaux émis par le système éducatif sur les décisions individuelles, partant du principe que certains parcours scolaires sélectionnent mieux que d'autres les élèves. On peut penser dans le cas de la France par exemple que les "Grandes Ecoles" fournissent un meilleur signal des capacités individuelles que des parcours de type universitaire, moins sélectifs et plus hétérogènes. En effet, l'absence de barrière à l'entrée, la multiplication et la diversification des parcours de formation, et le processus de décentralisation qui rend de plus en plus autonome la gestion des établissements universitaires, sont autant de facteurs qui peuvent brouiller la perception que peuvent avoir les employeurs et les élèves des signaux de productivité. Pour prendre en compte l'idée que la qualité des signaux éducatifs peut varier selon le type de parcours scolaire, nous introduisons dans le modèle un paramètre α :

$$\frac{dQ}{Q} = \mu_\theta \lambda dt + (1 - \alpha\lambda)\, \sigma'_\theta dZ$$

Le paramètre α peut théoriquement prendre toutes les valeurs sur l'intervalle $]0; 1]$. Cela signifie qu'il existe, au moins en théorie, un continuum de parcours de formation pouvant être classés selon la qualité des signaux de productivité qu'ils émettent.

Dans le cas où l'individu ne s'éduque pas ou ne s'éduque plus, $\lambda = 0$, la productivité moyenne n'augmente plus et le risque est maximum $\left(Var\left(\frac{dQ}{Q}\right) = \sigma_\theta^2 dt\right)$. Par contre lorsque l'individu consacre tout son temps disponible à l'éducation $\lambda = 1$, la productivité moyenne est maximale $\left(E\left(\frac{dQ}{Q}\right) = \mu_\theta dt\right)$ mais n'est pas certaine comme dans les sections précédentes où l'on a supposé un filtre parfait. En effet, il subsiste un risque, $Var\left(\frac{dQ}{Q}\right)$, égal à $\left[(1-\alpha)\,\sigma_\theta\right]^2 dt$. Ce risque est d'autant plus fort que la valeur du paramètre α est faible. Si on définit la qualité du signal, c'est-à-dire la qualité de l'information fournie par l'éducation, comme une fonction inverse du risque, alors on peut dire que la qualité de l'information est d'autant plus grande que la valeur du paramètre α est élevée. En effet, si $\alpha = 0$, l'éducation ne fournit aucune information. Dans ce cas, le risque portant sur la productivité est maximal. A l'inverse, si $\alpha = 1$, l'efficacité du filtre est maximale. Dans ce cas, qui est celui décrit dans la section précédente, l'information révélée ne dépend plus que du niveau d'éducation. Lorsque l'individu consacre tout son temps à l'éducation, le filtre est parfait : l'information est parfaitement révélée et le risque portant sur la qualité productive de l'individu disparait : $Var\left(\frac{dQ}{Q}\right) = 0$.

Pour simplifier l'exposé, nous supposons qu'un parcours de type "Grandes Ecoles" identifie mieux la qualité des étudiants qu'un parcours universitaire. On peut alors étudier l'impact de la différence de qualité du signal sur la demande d'éducation. La résolution du modèle donne :

$$\lambda^* = \frac{B(t,T)q + W - C(t,T)u}{B(t,T)q} \frac{\mu_\theta - \alpha\sigma'_\theta\sigma_\omega - \frac{1}{B(t,T)}}{\alpha^2\sigma_\theta^2} + \frac{\sigma_\theta\sigma_\omega + \alpha\sigma_\theta^2 - \sigma_\theta\sigma_\delta}{\alpha\sigma_\theta^2} - \frac{q + C(t,T)}{B(t,T)q} \frac{\sigma'_\theta\sigma_u}{\alpha\sigma_\theta^2}$$

Proposition : *En présence d'imperfections du signal, la demande optimale d'éducation est d'autant plus forte que la qualité de signal est élevée. Les étudiants des grandes écoles (ge) doivent atteindre des niveaux d'éducation plus élevés que les universitaires (univ).*

Preuve : $\frac{d}{d\alpha}(\lambda^*) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{Bq+W-Cu}{Bq}\frac{\frac{1}{B(t,T)}-\mu_\theta}{\alpha^2\sigma_\theta^2} + (1-\lambda^*)\right) > 0 \Leftrightarrow \lambda^*_{ge} > \lambda^*_{univ}$

En général, sous l'hypothèse de filtre imparfait, les individus sont amenés à poursuivre davantage leurs études pour affiner leur signalement, quelle que soit leur aptitude initiale (Landeras P. et J.M.P de Villareal, 2005). Ce résultat est obtenu également avec notre modèle puisque l'on observe une relation positive entre la qualité du signal et la demande optimale d'éducation. Néanmoins, une nuance peut être apportée dans la mesure où dans notre modèle la qualité globale du signal produit par un parcours de formation dépend du niveau d'éducation atteint dans le parcours choisi[27]. Ainsi, notre modèle prédit que les individus empruntant des parcours sélectifs atteignent des niveaux d'éducation plus élevés que les individus passant par des parcours moins sélectifs. Deux remarques peuvent atténuer la portée de ce résultat. D'une part, le terme "sélection" reflète uniquement le fait que les individus sont identifiés à l'issue de leur parcours éducatif, à travers la production d'information par

[27]Dans les modèles de signal imparfait, la qualification est généralement définie par le niveau d'éducation atteint par l'individu plus un choc aléatoire. L'incertitude sur le signal est additive de sorte que le degré d'imperfection du signal est indépendant du niveau d'éducation atteint.

l'éducation. Il s'agit par conséquent d'une sélection *ex post.* Les modes de sélection à l'entrée de différents parcours de formation ne sont pas traités dans cette section. La seconde remarque, en lien direct avec la première, est que le processus de sélection est exogène dans le modèle. Les différences de sélectivité des parcours sont données, et ne font pas l'objet d'un choix par les individus. Il est important, dans des travaux futurs, de pouvoir intégrer ces deux remarques. D'une part, si certains parcours exposent davantage au risque que d'autres et que les individus en sont conscients, alors le choix du parcours est un enjeu stratégique pour l'individu que l'économiste doit prendre en compte. D'autre part, on sait que les différents modes de sélection à l'entrée des établissements scolaire ne sont pas neutres du point de vue de l'équité et de l'égalité des chances des étudiants face à la réussite scolaire et professionnelle. Gamel (2000a, 2000b) a traité en détail cette question des implications de la sélection à l'entrée pour le cas français, dans le cadre des théories du filtre et du signal.

Néanmoins, l'originalité de cette extension est de pouvoir étudier l'impact des risques sur la demande d'éducation selon différents degrés de sélection, ou différentes qualités de l'information :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\lambda^*}{d\sigma_\delta}\right) &= \frac{d}{d\alpha}\left(-\frac{\rho_{\theta\delta}}{\alpha\sigma_\theta}\right) = \frac{1}{\alpha^2\sigma_\theta}\rho_{\theta\delta} < 0 \\
\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\lambda^*}{d\sigma_\omega}\right) &= \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\rho_{\theta\omega}}{\alpha\sigma_\theta}\left(1-\frac{Bq+W-Cu}{Bq}\right)\right) = \frac{W-Cu}{Bq}\frac{\rho_{\theta\omega}}{\alpha^2\sigma_\theta} > 0 \\
\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\lambda^*}{d\sigma_u}\right) &= \frac{d}{d\alpha}\left(-\frac{1+C}{Bq}\frac{\rho_{u\theta}}{\alpha\sigma_\theta}\right) = \frac{q+C}{Bq}\frac{\rho_{u\theta}}{\alpha^2\sigma_\theta} < 0 \\
\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\lambda^*}{d\sigma_\theta}\right) &= \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\sigma_\theta}(1-\lambda^*) - \frac{1}{\sigma_\theta}\frac{W+Bq-Cu}{Bq}\frac{\mu_\theta-\frac{1}{B}}{\alpha^2\sigma_\theta^2}\right] > 0
\end{aligned}$$

Comme les calculs ci-dessus le montrent, la qualité de l'information fournie par l'éducation réduit l'impact des risques sur la demande optimale d'éducation. En effet, la qualité de l'information réduit l'impact de tous les risques[28]. La conclusion immédiate que nous pouvons formuler à partir de cette extension théorique est que l'éducation sera d'autant moins utilisée comme une stratégie de protection face au risque[29] que l'information transmise par le système de formation est de bonne qualité. En d'autres termes, les étudiants universitaires ont plus de chance que les étudiants des Grandes Ecoles de poursuivre des études au-delà de ce qu'il aurait été nécessaire en l'absence de problèmes informationnels. Si l'on maintient notre hypothèse simpliste que l'université sélectionne moins bien les étudiants que les Grandes Ecoles[30], cette conclusion est consistante avec les prédictions des modèles de filtre et de signal traditionnels concernant la course à la différenciation par les diplômes universitaires.

3.4. Conclusion

Les individus augmentent-ils leur niveau d'éducation pour se couvrir contre le risque ? Selon les prédictions du modèle standard de capital humain avec incertitude la réponse est clairement non. Le modèle présenté dans ce chapitre répond positivement.

Partant de la conclusion du chapitre précédent que l'individu doit réduire son niveau d'éducation pour se couvrir contre les différents risques, l'ambition de ce chapitre était de définir les conditions théoriques sous lesquelles l'éducation pouvait apparaître comme une protection face aux risques. Il faut pour cela intégrer au modèle de capital humain standard une fonction informationnelle de l'éducation. Outre la fonction de production de connaissances et des compétences valorisables sur le marché du travail,

[28]On observe en effet un signe positif pour les risques qui ont un effet négatif (valeur marchande de l'éducation) et un signe négatif pour les risques qui ont un impact positif sur la demande d'éducation (dépréciation, aptitude et chômage).

[29]et de rentabilisation de la prise de risque

[30]et en supposant que la qualité du contenu des enseignements dans les deus institutions sont de qualité identique

nous considérons l'éducation comme un dispositif qui révèle l'information sur la véritable productivité des individus, hypothèse fondamentale des théories du filtre et du signal.

Après avoir rappelé les principes fondamentaux des théories du tri, nous avons présenté le positionnement de notre hypothèse particulière dans la littérature sur le filtre et le signal. Ces théories du tri ont longtemps été présentées comme des théories concurrentes à celle du capital humain. Bien que la construction d'un modèle néoclassique général de l'éducation ne soit pas à la portée de cette thèse, ce chapitre montre qu'il est possible de construire un modèle dans lequel les effets de capital humain et de signal sont complémentaires. L'objectif premier de ce chapitre est de réévaluer l'impact de l'incertitude (salaire, aptitude, dépréciation et chômage) sur la demande individuelle d'éducation dans ce nouveau cadre théorique. Le résultat central du modèle est qu'un individu averse au risque va augmenter sa demande d'éducation pour se protéger contre le risque, en particulier contre le risque de chômage. En échange, l'individu est prêt à supporter une prime de risque négative, c'est-à-dire une perte financière.

Ce résultat ouvre de nouvelles perspectives empiriques pour différencier les effets de capital humain des effets de filtre. Il est très difficile en effet de départager empiriquement les effets de filtre ou de signal des effets d'apprentissage dans la relation positive entre le niveau d'éducation et les gains obtenus sur le marché du travail. En général, isoler le pur effet filtre et le pur effet capital humain dans la détermination des gains individuels est très difficile, car l'aptitude des élèves, de par la nature des données disponibles, est très difficilement mesurable indépendamment de ses effets sur l'apprentissage scolaire. Ce problème d'identification empirique ne repose pas uniquement sur des difficultés techniques de mesure. Il est en partie inhérent à ces théories, du moins dans leur formulation standard. Le problème de fond réside dans la difficulté de ces théories à fournir des prédictions différentes quand à l'effet de l'aptitude. La prise en compte de l'incertitude produit de nouvelles prédictions au plan des stratégies individuelles. Avec ce modèle théorique, il est désormais possible de différencier empiriquement ces deux hypothèses concurrentes : éducation comme actif risqué si l'on observe une relation positive entre le niveau d'éducation et la variance des salaires, et éducation comme dispositif de signalement si l'on obtient la relation inverse. Nous discutons précisément de ces questions d'ordre économétrique dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 4

Éducation et risque : perspectives empiriques

Résumé

Ce chapitre traite de la relation empirique entre l'éducation et le risque. La discussion autour des principales contributions et des différentes méthodes d'estimation employées, permet de dresser un bilan des problèmes économétriques que pose l'identification de l'effet du risque sur les rendements de l'éducation ou sur les choix éducatifs directement. La difficulté essentielle est de pouvoir séparer l'effet des différentes sources de risque et celui de l'hétérogénéité non observée dans la dispersion observée des gains. Sur la base des restrictions théoriques suggérées dans le chapitre précédent nous proposons une stratégie d'estimation simple permettant d'identifier le sens de la relation entre l'éducation et le risque.

4.1. Introduction

Ce chapitre aborde la relation entre l'éducation et le risque d'un point de vue économétrique. L'objectif central du chapitre est de placer la question du risque au même plan que celle de l'hétérogénéité individuelle non observée dans l'estimation des rendements du capital humain.

L'économie de l'éducation a principalement pour objet la mesure de l'efficacité économique de l'éducation. Au plan microéconométrique, celle-ci est mesurée par l'effet causal non biaisé de l'éducation sur gains obtenus par les individus sur le marché du travail. L'équation de gains de Mincer (1958), qui est la traduction empirique du modèle initial de capital humain, est le point de départ naturel de toute la littérature sur les rendements de l'éducation. Les problèmes que pose l'estimation de l'équation de Mincer standard ont été très tôt mis en évidence par Grilliches (1977) notamment. En particulier, les problèmes d'endogénéité de l'éducation, de biais de sélection, d'hétérogénéité individuelle non observée et d'erreurs de mesure, invalident l'interprétation du coefficient de la scolarité comme étant le taux de rendement interne de l'éducation (Heckman, Lochner et Todd, 2006). Des progrès considérables ont été faits (Card, 2001). Aujourd'hui, les questions de sélection et d'hétérogénéité individuelle font l'objet d'un traitement systématique dans la plupart des travaux économétriques modernes, sous l'influence d'Heckman notamment (en témoigne le prix Nobel d'économie qui lui a été attribué en 2002 pour ses avancées dans le domaine).

Dans cette quête de l'effet causal de l'éducation le risque associé au rendement de l'éducation a longtemps été ignoré par l'analyse empirique. Pourtant les faits et les évidences empiriques que nous présentons dans ce chapitre suggèrent que le risque est important. Nous avons montré au cours des chapitres précédents comment en théorie le risque pouvait affecter les comportements individuels. Ne pas prendre en compte empiriquement le risque biaise inévitablement les estimations de l'effet causal de l'éducation.

La section suivante (section 2) expose les principaux travaux qui ont tenté de mesurer l'effet du risque sur l'éducation. Les résultats, de même que les méthodes d'estimation ne sont pas homogènes. Ce constat provient en partie des différents types de risques qui sont estimés et qui peuvent, comme on peut s'en douter, influencer de manière différenciée les rendements de l'éducation et les choix éducatifs. Ces différences proviennent surtout des difficultés à définir empiriquement une mesure précise du risque et donc de son effet. Par définition, le risque n'est pas une variable palpable a priori souvent confondue avec d'autres facteurs non observables par l'économètre. En effet, pour plusieurs raisons présentée dans la section 3, la principale difficulté réside dans la distinction entre risque et hétérogénéité individuelle non observée (désormais HNO). Sans données précises sur les anticipations subjectives des individus, l'implémentation empirique de la mesure du risque devient vite techniquement très compliquée. La littérature n'a pas encore fourni de solution pleinement satisfaisante à ce problème. Face à ce constat, nous proposons dans la section 3, une stratégie d'identification plus simple de la relation éducation-risque, directement déduite des modèles théoriques décrits dans les chapitres précédents.

4.2. Revue de littérature

Nous avons vu dans les chapitres précédents les différentes sources de risques auxquelles peuvent être confrontés les individus entreprenant des choix de scolarité. Nous avons montré comment ces incertitudes compliquent les choix des individus mais également le travail de l'économiste qui cherche à les étudier. Bien que de plus en plus de travaux s'intéressent aujourd'hui à cette question, la littérature empirique n'apparait pas homogène tant dans les résultats que dans les méthodes employées. Dans cette section nous présentons une synthèse des principaux résultats empiriques concernant la relation éducation-risque.

La première difficulté est de définir et d'estimer correctement le risque dans la relation éducation-salaire. D'une manière générale le risque associé à l'éducation se définit par la variance des rendements de l'éducation. Il se mesure à partir de la dispersion des rendements observés. La majeure partie de la littérature, que nous présentons dans cette section, traite essentiellement de la variabilité *ex post* des rendements.

Si Becker (1964) avait déjà observé une augmentation de la dispersion des gains avec le niveau de scolarité, c'est Weiss (1972) qui est le premier à étudier cette relation à partir d'un modèle théorique qui intègre le comportement des individus face au risque. En effet, il estime sur données américaines la relation entre les niveaux de scolarité atteints par les individus et la dispersion des gains pour différents niveaux d'aversion au risque. Il observe un effet positif du risque sur les salaires, d'autant plus fort que l'aversion au risque est forte.

D'une manière générale l'ampleur de l'effet du risque sur les comportements éducatifs et les salaires attendus sur le marché du travail est fortement liée au degré d'aversion au risque des individus. Plus l'aversion au risque des individus est forte et plus leur réaction face au risque sera forte. Cependant, le degré d'aversion au risque n'affecte pas le sens de la relation éducation-risque. Il affecte seulement son ampleur. De plus, il est très difficile de distinguer empiriquement l'aversion au risque d'autres composantes des préférences individuelles sans données adéquates. D'ailleurs pour Hause (1974), Weiss mélange dans son estimation l'effet de l'aversion au risque avec la préférence pour le présent, qui mesure le coût psychologique associé au report des gains lorsque l'individu s'éduque. A notre connaissance, la base de données italienne[1] utilisée par Belzil et Leonardi (2007) est l'une des seules, sinon la seule, à permettre la distinction des préférences pour le présent et l'aversion au risque. En effet, les auteurs disposent de données précises leur permettant de construire le véritable indice d'Arrow-Pratt, et d'estimer directement son effet[2].

Mesurer l'aversion au risque est un travail qui nous paraît secondaire. C'est pourquoi nous l'abordons de manière superficielle tout au long de ce chapitre et insistons davantage sur le signe des effets que sur leur ampleur précise.

[1]Enquête de la Banque d'Italie sur le revenu et la prospérité des ménages.

[2]Faute de données précises, Diaz-Serrano et Hartog (2007) utilisent une approximation de l'aversion au risque à partir de l'information disponible sur la part des revenus que les ménages espagnols consacrent à l'achat de billets de loterie

La majeure partie de la littérature actuelle traite de la relation éducation-risque de manière indirecte en mesurant l'impact du risque sur les salaires. L'objectif est de mesurer la compensation salariale du risque associée à différents types d'activités ou différentes filières de formation, c'est-à-dire des groupes dans lesquels les individus sont supposés faire face au même risque. La théorie du capital humain prédit en présence d'une incertitude prévisible (cf : Chapitre 3) que la variance du rendement de l'éducation doit avoir un effet positif sur les salaires. S'ils sont averses au risque, les individus doivent s'attendre à recevoir une compensation (ou une prime) salariale pour le risque qu'ils ont entrepris. Cette littérature initiée par King (1974) puis par McGoldrick (1995) et McGoldrick et Robst (1996), a d'abord étudié l'effet du risque sur les salaires pour différents groupes de métiers.

De manière générale, la procédure d'estimation de l'effet du risque se fait en deux étapes. Dans la première étape, on estime une équation de Mincer standard dans laquelle le log des salaires observé dans une profession est régressé sur le nombre d'années d'études, l'expérience et l'expérience au carré. Selon les études, d'autres variables sont ajoutées pour contrôler l'influence de l'environnement (géographique, démographique, social et culturel) des individus étudiés. Un effet fixe est également ajouté dans le but de contrôler l'effet des variables omises qui peuvent biaiser les mesures du risque à l'intérieur de chaque profession. A partir des résidus "within" de cette équation est construite une mesure du risque spécifique à chaque groupe professionnel : la variance des salaires[3].

Dans une seconde étape cette mesure du risque est intégrée dans l'équation de régression de départ, appelée équation de Mincer augmentée, qui est re-estimée.

Dans tous ces travaux, le coefficient associé au risque est positif, ce qui prouve que le marché rémunère le risque. Les individus qui se trouvent dans les professions les plus risquées ont une prime supérieure aux autres. Hartog et al. (2003) estiment le modèle de McGoldrick (1995) sur plusieurs bases de données (Allemagne, Espagne,

[3]Cette littérature s'intéresse aussi à l'effet de l'affectation pour le skewness, appelé aussi coefficient de prudence, construit à partir du moment d'ordre trois de la distribution. Il mesure l'impact d'une faible probabilité d'obtenir un gain élevé.

Pays Bas Portugal et USA) et confirment l'hypothèse d'une compensation salariale du risque, qui varie de 1 à 4% selon les pays pour une augmentation de 10% du risque. Sur données américaines, Hartog et Vijverberg (2007) obtiennent également ce résultat, pour différentes mesures du risque et pour plusieurs représentations des préférences individuelles vis-à-vis du risque.

D'autres travaux appliquent cette procédure d'estimation non plus aux salaires associés à des types de professions mais aux salaires dans différentes spécialités de formation. Ce changement de variable endogène permet d'éviter les biais liés à la sélection qui s'opèrent lors des mobilités professionnelles, puisqu'une fois sur le marché du travail l'individu ne peut plus revenir. Ainsi la dispersion des gains observés reflète mieux le véritable risque associé à l'éducation. Le papier de Diaz Serrano, Hartog et Skyt Nielsen (2008) confirme le fait que la prime salariale est plus élevée dans les filières de formation où la variance des salaires est plus élevée. L'autre apport important de ce travail par rapport à la littérature antérieure est la prise en compte de la dimension temporelle. Diaz Serrano, Hartog et Nielsen (2008) utilisent un long panel de données danoises (17 vagues d'observations annuelles, couvrant la période 1984-2000) leur permettant de distinguer les chocs transitoires des chocs permanents. En effet l'utilisation de données longitudinales permet de décomposer la variance des résidus issus des estimations en une composante permanente et une composante temporelle. Cette décomposition apporte une information précieuse sur la nature de l'incertitude portant sur les salaires. Les individus peuvent en effet ne pas connaître le salaire associé à un niveau d'éducation particulier à un moment donné ni son évolution. Lorsque l'on observe par exemple les salaires des individus dix ans après la sortie du système éducatif, les différences de salaires peuvent s'expliquer par des différences de caractéristiques non observées mais également par des évolutions différentes de salaires individuelles indépendamment des caractéristiques individuelles, ce qui équivaut à des différences de chance ou de risque.

Les différences de salaires qui génèrent de la variance empirique peuvent résulter non seulement de différences de caractéristiques individuelles non observées mais également de changements intervenus au cours du temps indépendamment des caractéristiques individuelles. Le caractère longitudinal des données permet ainsi de préciser la part de l'incertitude due au changement dans le temps et celle qui est due à des différences individuelles. Lorsqu'on ne prend pas en compte la dimension temporelle on suppose que les salaires sont identiques dans le temps. Ce faisant, on attribue toute la variabilité dans le temps à de la variabilité individuelle. Diaz Serrano, Hartog et Nielsen (2008) concluent que la compensation salariale des chocs transitoires est bien plus importante que la compensation des chocs permanents : une augmentation du risque de 1% est associée à une augmentation des salaires de 0.06% lorsque le risque provient de la composante permanente et de 0.19% lorsqu'il provient de la composante transitoire.

Nielsen et Vissing-Jorgensen (2006) utilisent le même panel que Diaz Serrano, Hartog et Nielsen (2008) pour étudier directement l'effet du risque (transitoire et permanent) sur les choix éducatifs. Elles identifient 50 types de formations universitaires selon trois modalités : la durée des études, la filière scolaire suivie et les critères de sélection dans la filière. Elles utilisent l'information relative aux critères d'admission, en particulier la note obtenue au diplôme pour entrer dans une discipline, pour construire une *proxy* de l'aptitude des individus. Pour chacun des groupes, elles estiment le revenu du travail des individus ayant obtenu le diplôme en fonction de 5 critères : les salaires moyens de départ, le taux de croissance des salaires moyens jusqu'à 40 ans, le taux de croissance des salaires moyens après 40 ans, la variance des chocs transitoires et la variance des chocs permanents (sur le revenu du travail). Les variables estimées ainsi que d'autres contrôles[4] sont intégrés dans un modèle de choix scolaire. Elles peuvent alors étudier l'impact des différentes composantes du risque sur la trajectoire scolaire des individus, c'est-à-dire sur les probabilités de poursuite dans une filière ou de changement de spécialité de formation.

[4]Elles contrôlent la distance entre la localité de résidence et celle de l'école, le revenu et l'éducation des parents (le log du revenu du père et une variable muette indiquant si au moins un des deux parents à suivie une éducation du même type et de même durée que son enfant).

Elles montrent que les risques associés au revenu du travail ont un effet significativement négatif sur les choix éducatifs individuels. La variance permanente a plus d'effet que la variance transitoire sur les choix individuels. Elles construisent également un modèle structurel leur permettant de mesurer l'aversion au risque. En calibrant leur simulation à partir des estimations précédentes, elles trouvent que les individus sont fortement averses au risque.

Dans la même logique que Skyt Nielsen et Vissing-Jorgensen (2006), Meghir et Pistaferri (2004) estiment un modèle de gains dans lesquels ils séparent les chocs de revenus en une composante idiosyncratique et une composante permanente. Le risque ici est la variance conditionnelle de ces chocs. Ils tiennent compte des erreurs de mesure, des différences spécifiques entre groupes d'éducation et des différences spécifiques au temps. La variance conditionnelle des chocs de revenu est modélisée par un processus ARCH (AutoRégressive Conditional Heteroscedasticity) qui contrôle de l'hétérogénéité observée et non observée. Cette tache est difficile dans la mesure où ces deux composantes ne sont pas observables séparément. Leur principal apport concerne le contrôle de l'HNO dans la composante transitoire de la variance. En effet, les travaux précédents séparent l'HNO du risque dans la composante permanente de la variance. Mais la composante transitoire doit être également corrigée de l'HNO dès lors que des différences dans la dynamique des revenus individuels sont attribuables à des caractéristiques individuelles non observées. Tester la dépendance d'état contre l'hypothèse d'hétérogénéité individuelle permet de résoudre ce problème. Les auteurs montrent comment les conditions sur les moments de la distribution des gains doivent être dérivées pour estimer les propriétés dynamiques de la variance conditionnelle du revenu, et pour tester la présence d'une HNO persistante à la fois dans les innovations permanentes et transitoires.

La spécification de leur modèle[5] permet de séparer le risque global (capté par un trend), c'est-à-dire commun à tous les individus classés par groupes d'éducation,

[5]L'estimation est menée sur un échantillon d'hommes âgés de 25 à 55 ans pour lesquels il y a au moins 9 périodes d'observations des revenus exploitables les données s'étalent de 1967 à 1992 : salaire, primes et heures supplémentaires, sur trois groupes d'éducation : abandon au lycée, diplômés du lycée et diplômés de l'université.

du risque individuel, celui qui fait l'objet de stratégies individuelles. La composante non expliquée des revenus est décomposée en trois composantes : erreurs de mesures (iid), composante transitoire faiblement persistante et une composante marginale permanente. Leur procédure d'estimation permet également de purger la composante transitoire des erreurs de mesure qui par définition ne sont pas du risque.

Ils montrent à partir des données du PSID (*Panel Study of Income Dynamics*) que les chocs transitoires et permanents sont des composantes importantes de la variance globale, qu'il y a une forte dépendance d'état dans la variance permanente et dans la variance transitoire, et que ces variances sont très hétérogènes entre les individus. Quelles que soient les spécifications de la variance, ils obtiennent toujours une variance transitoire et une variance permanente plus faible pour les diplômés de l'université que pour les diplômés du lycée.

Enfin, on retiendra de la littérature empirique une dernière façon de traiter la relation éducation-risque. Celle-ci repose sur l'estimation directe de l'effet de l'éducation sur la dispersion des gains. Il ne s'agit plus de mesurer l'impact du risque sur les salaires et d'en déduire les conséquences en terme de choix éducatif, ni de mesurer l'impact du risque sur les choix de poursuite d'étude, mais de mesurer l'impact de l'éducation sur la variance des salaires[6]. De cette relation, on peut déduire les comportements individuels face au risque comme nous avons vu dans les chapitres précédents.

Plus précisément, le rendement est modélisé comme un coefficient aléatoire. Techniquement, dans ce type de modèle à coefficient aléatoire l'éducation génère de l'hétéroscédasticité dans la dispersion des gains. La variance n'est plus constante. Le contrôle de cette forme d'hétéroscédasticité permet non seulement d'obtenir des estimateurs robustes de l'effet moyen des variables (en particulier de l'éducation sur le log des gains), mais aussi d'identifier la variance du rendement de l'éducation : le risque.

[6]Sur le log des salaires plus précisément.

Low et Ormiston (1991) estiment un modèle à coefficients aléatoires à partir des données du NLS (National Longitudinal Survey) et montrent que l'allongement de la durée de scolarité augmente la variance des salaires, aussi bien pour les hommes que pour les femmes. Lorsque le risque et l'aversion pour le risque sont pris en compte, le taux de rendement de la scolarité est plus de 90% moins élevé que dans les estimations traditionnelles. Ne pas prendre en compte la nature stochastique de rendement de l'éducation biaise très fortement leur estimation. Low et Ormiston (1991) différencient également l'impact du capital humain général et du capital humain spécifique sur la variance des salaires. Ils montrent que les niveaux élevés de capital humain général, mesuré par le niveau de scolarité, l'expérience professionnelle et le QI, sont positivement corrélés avec la variance des gains. Par contre, les niveaux élevés de capital humain spécifiques, mesuré par l'ancienneté dans l'entreprise, sont négativement corrélés avec le risque pour les hommes et positivement corrélés pour les femmes. On explique généralement cette différence de profil de gains observés en début de vie active par une probabilité d'interruption l'activité professionnelle plus grande pour les femmes.

Les données en coupe de Low et Ormiston (1991) ne permettent pas de prendre en compte la composante transitoire des chocs aléatoires. L'effet individuel est invariant dans le temps. Harmon, Hogan et Walker (2003), estiment un modèle à coefficient aléatoire sur des données britanniques à différentes dates, allant de 1993 à 2000, leur permettant de mesurer l'évolution de la variance des salaires au cours du temps. Ils trouvent que les rendements moyens de la scolarité sont plus élevés pour les femmes que pour les hommes (respectivement 7% et 4%), avec un risque associé à ces rendements d'environ 4% qui est relativement stable sur la période d'observation. Les estimations de Harmon, Hogan et Walker (2003) prennent en compte l'évolution de la variance, mais elles sont soumises à un éventuel biais d'aptitude. Belzil et Hansen (2004) estiment un modèle à coefficients aléatoires dynamique sur les données du NLSY, leur permettant de contrôler les variations temporelles ainsi que les différences de caractéristiques individuelles non observées dans la distribution des gains. Ils obtiennent une dispersion des gains fortement hétéroscédastique, aussi bien du point de vue des salaires que des taux d'emploi. Plus précisément, ils montrent que l'éducation réduit fortement la dispersion des gains, ce qui contraste avec les estimations traditionnelles de ce type de modèles.

Au terme de cette analyse, nous retiendrons que la littérature, à travers les différentes approches présentées, fournit des résultats contrastés dans l'analyse de la relation éducation-risque. Ainsi, mesurer le risque n'est pas une tâche facile. Dans la section qui suit nous dressons un bilan des principales difficultés qui se posent lorsqu'on essaye de mesurer empiriquement l'effet du risque.

4.3. Les problèmes posés par la mesure du risque

La façon idéale d'évaluer la relation entre l'éducation et le risque associé à son rendement serait de disposer de données permettant de construire une variable "risque" et d'estimer directement son effet sur l'éducation. A notre connaissance, seuls deux travaux : celui de Kodde (1986), et très récemment celui de Schweri, Hartog et Wolter (2009), disposent de telles données. Les données néerlandaises de Kodde (1986) et suisses de Schweri et al (2009) contiennent une information précise des anticipations subjectives des individus concernant le salaire futur correspondant à leur niveau d'éducation, de même que le salaire maximal et le salaire minimal qu'ils pensent percevoir à leur entrée sur le marché du travail[7]. Ces anticipations sont demandées dans le cas où l'individu réussit son diplôme et dans le cas où il arrête ses études et entre sur le marché du travail. Ces informations permettent de caractériser la distribution subjective, en particulier la moyenne et la variance des salaires anticipés pour les deux options qui s'offrent à l'étudiant : continuer ses études jusqu'au diplôme ou entrer sur

[7]Pour Schweri et al, 2009, le principe est strictement identique. La différence avec les données de Kodde, 1986, c'est que les anticipations portent sur la médiane du travail attendu ainsi que la probabilité d'avoir moins de 80% de travail et plus de 120%. Cela permet de caractériser les paramètres de la distribution subjective des salaires qu'anticipe l'individu.

le marché du travail. L'intérêt capital de ces données subjectives c'est qu'elles fournissent une mesure du vrai risque : celui sur lequel les individus fondent leur choix de poursuite d'études.

Malheureusement toutes les autres bases de données, en particulier, les données françaises, ne contiennent pas d'information subjective sur les salaires anticipés, de sorte que le risque doit être déduit de la dispersion des salaires observés. Dans ces conditions estimer le risque et son effet devient un challenge difficile pour l'économètre dans la mesure où la dispersion des salaires observés a posteriori ne reflète pas que du risque. Elle agrège différentes sources de dispersion : des chocs prévisibles (le risque), certes, mais également des différences de caractéristiques individuelles non observées par l'économètre, des chocs imprévus par les individus (incertitude intrinsèque) ainsi que des erreurs de mesures (liées à la spécification du modèle économétrique et des données utilisées). En l'absence de mesure directe du risque à partir de données subjectives, nous proposons de définir le risque de la façon suivante :

Le risque associé à un niveau d'éducation est la partie prévisible de la variance des gains associés à ce niveau d'éducation qui n'est ni généré par de l'hétérogénéité non observée, ni par des erreurs de mesures.

Des lors, obtenir une mesure empirique du risque à partir de cette définition est très compliqué. Dans le reste de cette section nous exposons de manière graduelle les problèmes que pose l'identification de la relation éducation-risque.

La principale difficulté est d'identifier dans la variance des gains observés ce qui relève du risque et ce qui relève des caractéristiques individuelles non observées. Le problème en d'autres termes est de pouvoir séparer l'effet de caractéristiques individuelles connues par l'individu mais inconnue par l'économètre de l'effet du risque, c'est-à-dire de facteurs ou de caractéristiques inconnues par l'économètre et par l'individu.

On sait du fait du manque de données précises, que certaines caractéristiques individuelles comme l'aptitude cognitive ou la motivation, qui peuvent avoir un effet sur les décisions d'éducation et les salaires, sont inobservables par l'économètre. Ne pas contrôler ces caractéristiques inobservées crée de la dispersion qui biaise les estimateurs du modèle. En effet, si on n'élimine pas cette composante de la variance, on l'attribue à du risque, ce qu'elle n'est pas. On surestime donc le risque et par conséquent on sous estime son effet sur les salaires. Nous avons noté dans la section précédente que l'estimation d'un modèle à effet fixe permet d'éliminer ce biais, que l'on retrouve labellisé dans la littérature sous le nom de biais de variables omises ou biais d'aptitude. Cette méthode est valide pour des estimations sur des données longitudinales. Sur des données en coupe transversale, l'estimation d'un modèle à effet fixe ne permet pas d'éliminer entièrement le biais. Cette procédure élimine toute l'HNO et aussi une partie du risque. En effet, comme le rappellent Postel-Vinay et Robin (2002) : "lorsqu'on estime un modèle à composante d'erreur statistique alors que le processus générateur de données est dynamique, on attribue toutes les différences historiques à l'effet individuel". Autrement dit, toutes les différences dans la trajectoire des salariés sont agrégées à la première date d'observation. Or Postel-Vinay et Robin (2002) observent sur les données françaises de l'INSEE que ces différences historiques sont très importantes et qu'elles comptent pour 50% environ dans la variance totale des salaires. Autrement dit, ne pas prendre en compte la dimension temporelle sous estime le véritable risque auquel font face les individus. Enfin, pour avoir une mesure véritablement non biaisée du risque, il faut pouvoir purger de la composante temporelle de la variance l'éventuelle HNO. En effet, il est possible que les différences de caractères non observées qui expliquent en partie la variance des salaires à un moment donné (composante permanente) explique également en partie la trajectoire des salaires dans le temps (composante transitoire). Cette question est résolue par Meghir et Pistaferri (2002). Il est important de noter que la fenêtre d'observation doit être suffisamment large pour pouvoir observer statistiquement l'évolution des différences individuelles. En effet, la relation éducation salaire est souvent étudiée en France sur un échantillon de jeunes sortants du système éducatif pour lesquels nous disposons de données (CEREQ) sur le parcours dans le système scolaire et sur le marché du travail. Sans une fenêtre temporelle large, il est difficile pour cette population d'individualiser le salaire, c'est-à-dire de générer suffisamment de variance dans les données pour mesurer le risque, car beaucoup débutent au même salaire : le SMIC. De ce point de vue, la flexibilité offerte par les régressions en quantiles peut être utile pour caractériser le risque. Par exemple, Pereira et Martins (2001) mesurent le risque par la différence entre le haut et le bas de la distribution (entre les 10% des individus qui gagnent le plus et les 10% des individus qui gagnent le moins) et non pas par la variance. L'idée est que si l'individu ne sait pas où situer son salaire dans la distribution des gains futurs la différence entre le haut et le bas de la distribution est une indication du risque auquel il est confronté.

En théorie, il est donc possible de distinguer risque et HNO. En pratique cette distinction est beaucoup plus complexe. En effet, le contrôle de l'HNO est fondé sur l'hypothèse que les individus connaissent parfaitement leurs caractéristiques et les salaires associés. Pour certaines caractéristiques non observables comme l'effort ou la motivation cette hypothèse est sans doute vraie, pour d'autres caractéristiques cette hypothèse est moins évidente. On peut penser que les individus connaissent mal leurs propres capacités cognitives. Domitz et Manski (1996), montrent que les étudiants américains ne connaissent pas les gains associés à toutes les spécialités de formation. Webbink et Hartog (2004) obtiennent également sur données néerlandaises une corrélation extrêmement faible (0,06) entre les gains prédits et les gains réalisés effectivement par les étudiants entrant à l'université. L'ignorance des individus concernant la valeur exacte de leurs propres capacités cognitives doit être considérée comme du risque. Ainsi, lorsqu'on contrôle de manière classique l'HNO on élimine également une partie du risque. Autrement dit on surestime le véritable biais d'aptitude.

Les possibilités de caractériser l'information que possèdent les individus sur leurs propres capacités cognitives d'un point de vue technique semblent très limitées à ce jour. Seules les données peuvent permettre de limiter ce biais d'aptitude. Les bases de données américaines contiennent une information très riche sur les caractéristiques individuelles. En effet, pour les jeunes américains interrogés dans le NLSY (1979, 1997), on dispose des résultats aux tests d'aptitude ASVAB (Armed Services Vocational Aptitude Battery). Dans la mesure où les individus comme l'analyste connaissent les résultats de ces tests, l'aptitude cognitive est contrôlée et le biais de variables omises ne porte plus que sur des caractéristiques largement connues par les individus (effort, motivation) et non observées par l'analyste. On peut alors penser que dans une équation de salaire standard la variance résiduelle conditionnelle à l'HNO (et à son effet sur la scolarité) est une bonne approximation du risque.

En France nous ne disposons pas dans les enquêtes longitudinales des données précises sur l'aptitude des individus. L'absence d'information sur les compétences cognitives des individus, ne nous permet pas de mesurer précisément l'aptitude ni directement son effet sur la scolarité[8]. On peut alors faire l'hypothèse que l'aptitude non observée par l'économètre est aussi en grande partie inconnue par l'individu au moment où il prend ses décisions. Dans ces conditions, la correction habituelle du biais de variables omises, produit une estimation biaisée du risque. Ce dernier est sous évalué.

Enfin, nous adressons une dernière réserve sur la capacité des méthodes standards à pouvoir séparer risque et HNO. Sur données de panel, la correction classique du biais d'HNO par l'opérateur "within" élimine du modèle l'effet des variables constantes dans le temps. L'HNO est bien contrôlée si les caractéristiques individuelles inobservées sont effectivement fixes. Certaines le sont. D'autres, relevant du comportement et des préférences individuelles, comme la motivation, l'effort, les goûts et même dans une certaine mesure les capacités cognitives[9] des individus, peuvent évoluer. Dans ce

[8]Les enquêtes génération du CEREQ permettent néanmoins de construire une mesure approximative de l'aptitude grâce à l'information sur l'âge des individus au moment de l'entrée en 6ème et au baccalauréat. En comparant l'âge théorique, l'âge normal que l'individu doit avoir à un certain stade de son parcours scolaire sans avoir redoublé (18 ans pour le baccalauréat) à l'âge effectif des individus, on peut savoir si l'individu est en avance, à l'heure ou en retard. On peut alors établir un indicateur de l'aptitude : forte aptitude pour les élèves en avance, faible aptitude pour les élèves en retard et aptitude normale pour les élèves à l'heure au Bac. La construction d'un tel indicateur, certes partiel et approximatif, permet cependant de réduire la variabilité non expliquée des salaires et donc le biais d'aptitude.

[9]Sans entrer dans le détail de la littérature sur la mesure des capacités cognitives (et non cognitives) des individus, de nombreux travaux américains ont montré que les résultats aux tests d'aptitude ASVAB n'étaient pas exogènes. Blackburn et Neumark (1993) ont montré que les résultats des tests augmentaient avec l'âge des individus. Hansen Heckman et Mullen (2004), montrent que l'aptitude

cas, l'HNO n'est pas complètement éliminée. La variance mélange à nouveau le risque et cette HNO résiduelle.

En définitive, le risque est mesuré "en creux" dans la variance des gains. Sa mesure est d'autant plus précise que l'HNO est bien contrôlée.

L'autre grande critique adressée à cette littérature c'est l'ignorance des problèmes de sélection. Un biais de sélection survient lorsqu'au départ, la sélection de l'échantillon n'est pas aléatoire, c'est-à-dire lorsque la population étudiée a des caractéristiques particulières qui expliquent en partie la répartition des individus dans les différentes sous populations construites pour l'analyse économétrique. Le plus souvent, ce problème particulier d'endogénéité est le résultat d'un arbitrage individuel. L'individu rationnel choisit sous contraintes un niveau d'éducation. Ce choix est fondé sur la comparaison de deux alternatives, pour faire simple poursuivre ou arrêter les études. Le problème de la sélection survient à cause du fait que l'on ne peut jamais observer l'individu dans chacune des alternatives simultanément. On observe le résultat de son choix mais pas celui que l'individu aurait obtenu dans l'état contrefactuel, c'est-à-dire l'autre alternative. Par exemple, les attitudes face au risque peuvent être différentes selon les individus. Tous n'ont pas la même aversion au risque, ce qui peut affecter les choix d'éducation des individus à la marge et donc biaiser les estimations si ces différences ne sont pas prises en comptes. La seule étude concernant la France établie par Brodaty, Gary-Bobo et Priéto (2009), montre qu'en effet l'aversion au risque est différente selon les groupes d'individus. Les élèves dont les parents exercent des professions intellectuelles sont plus averses au risque que les autres. Si ces différences ne sont pas observables, elles doivent être contrôlées. Dans cette perspective,

mesurée dépend non seulement de l'âge et de l'environnement familial de l'individu, mais elle dépend aussi du niveau d'éducation atteint par les individus. L'impact positif de l'éducation sur les scores aux tests d'aptitude est également prouvé par Neal et Johnson (1996), Cawley, Connely, Heckman et Vytlacil (1997) et Weiberger et Kletzer (2002). Les individus qui vont à l'université tendent à choisir des matières au lycée qui améliorent leurs scores. Ces études mettent en évidence un problème de causalité inverse de l'éducation sur l'aptitude mesurée, rarement pris en compte dans les évaluations empiriques du rendement de l'éducation. Pourtant l'existence d'un tel effet simultané entre éducation et tests d'aptitude conduit à penser que l'on surestime souvent l'effet de l'aptitude sur les choix de scolarité.

Chen (2008) compare les gains des sortants du lycée et ceux obtenus par les sortants de l'université. Elle contrôle à la fois l'effet de l'endogénéité des choix de scolarité et celui de l'HNO dans les changements observés de la variance des gains. Elle montre que le biais de sélection est important et qu'il doit être pris en compte lorsqu'on compare les variances entre différents niveaux d'éducation. Elle trouve en effet que la prise en compte de la sélection double voire triple le différentiel de variance des salaires entre les lycéens et les diplômés de l'université. Elle sépare également HNO et incertitude sur les salaires dans le modèle corrigé de la sélection. Elle montre que le poids de l'HNO dans la variance des salaires est plus grand pour les diplômés de l'université que pour les lycéens, de sorte qu'*in fine* le différentiel de risque est très faible. Chen (2008) en conclut que les résultats antérieurs exagèrent le rôle négatif de l'incertitude sur la demande d'éducation.

La critique que nous avons adressé aux méthodes standard de correction de l'HNO s'applique également à l'analyse de Chen (2008). Par ailleurs, Carneiro, Hansen et Heckman (2003), Cunha, Heckman et Navarro (2005) et Cunha et Heckman (2007) montrent que la méthode standard de contrôle du biais de sélection d'Heckman (1978), par l'introduction de l'inverse du ratio de Mills dans le modèle, n'est pas appropriée en présence d'incertitude. La raison essentielle invoquée par les auteurs est que la dispersion observée des gains associé à un niveau d'éducation particulier ne reflète pas le risque auquel fait face l'individu au moment où il prend ses décisions. Ce qui intéresse l'économiste qui cherche à comprendre les choix scolaires et évaluer leur optimalité c'est le risque qui intéresse aussi les individus : celui qu'ils anticipent au moment de leurs choix, c'est-à-dire le risque *ex ante*. Retrouver la distribution *ex ante* des rendements de l'éducation à partir de la distribution *ex post* implique une construction de contrefactuels très difficile à mettre en œuvre en présence d'incertitude. Nous illustrons cette complexité par l'exemple suivant.

En finance, pour mesurer le rendement et le risque associé à un actif il suffit d'utiliser les observations du prix de l'actif. Les variations temporelles de ce prix permettent de calculer les valeurs du rendement et du risque. Si l'on suppose la concurrence pure et parfaite, ou du moins l'atomicité des agents, le prix des actifs est fixé par le marché. L'action d'un agent n'affecte pas la valeur marchande des titres. Le rendement et le risque *ex ante* et *ex post*, c'est-à-dire avant et après que l'individu l'ai acheté sont les mêmes. Pour le capital humain ou l'éducation, c'est différent. Le rendement et le risque dépendent du montant investi, c'est-à-dire du niveau (et de la spécialité) de formation atteint par les individus. Par conséquent il existe une différence entre les valeurs ex-ante et ex-post de la distribution des gains. Or, l'économiste observe uniquement le rendement *ex post* alors que l'individu fait son choix sur la base de la valeur *ex ante* des rendements de l'éducation. Alors que l'observation des choix d'un investisseur financier est fondée sur une seule distribution, le choix d'un élève est fondé sur la comparaison de deux distributions qui ne sont jamais observables simultanément. En effet, on ne peut pas observer en même temps un individu sur les deux parcours scolaires à la fois et mesurer les gains associés. On observe qu'un seul parcours et on ne peut qu'inférer sur les gains qu'aurait obtenu l'individu dans l'autre situation. Ce problème d'observabilité partielle rend difficile l'étude des choix en économie de l'éducation. Lorsque le futur est parfaitement connu, le rendement moyen *ex ante* de l'éducation est égal au rendement moyen *ex post* dans chaque sous population. Il est alors possible d'identifier la distribution jointe des gains potentiels obtenu par l'individu dans l'état observé et dans l'état contrefactuel, celui qui n'est jamais observé par l'économètre. L'application de la correction standard de la sélection à la distribution observée des rendements de l'éducation permet d'obtenir la distribution *ex ante* des rendements. En présence d'incertitude ce n'est plus le cas. Les individus établissent leur choix sur la comparaison des rendements anticipés qui peuvent être différents des rendements effectivement réalisés sur le marché du travail. L'individu peut se tromper et cette erreur d'anticipation n'est pas prise en compte dans la correction standard du biais de sélection. Entre le moment où l'individu prend sa décision et le moment où le rendement de l'éducation est réalisé, la distribution des gains peut changer, précisément à cause de l'incertitude. En définitive, même si l'économètre parvient à contrôler toutes les caractéristiques non observables qui entrent dans les choix d'éducation, il ne peut pas retrouver à partir de la distribution *ex post* des rendements la distribution *ex ante*. L'apport de Carneiro, Hansen et Heckman (2003), Cunha, Heckman et Navarro (2005) et Cunha et Heckman (2007) est de proposer une méthode originale permettant de résoudre le problème d'indentification des distributions contrefactuelles en adoptant une « structure en facteur » dans les termes d'erreur de l'équation de gains et de l'équation de choix de scolarité. Plus précisément, cette méthode permet de reconstruire l'ensemble d'information que l'agent exploite pour former ses choix et de déterminer ainsi la part de l'hétérogénéité *ex post* (la variabilité observée des salaires) qui est prévisible au moment où les individus effectuent leurs choix et celle qui ne l'est pas. Plusieurs sources de variabilité sont prises en comptes : coûts, aptitude et rendement futur de la scolarité. Ces composantes de la variabilité *ex post* sont modélisées comme des inobservables qui apparaissent dans les équations de choix et dans les équations de gains réalisés après que les décisions d'éducation aient été prises. Tout l'enjeu est de savoir si comme l'économètre les individus ne connaissent pas ces composantes de la variance ou s'ils les connaissent, car dans le premier cas, les composantes de la variance *ex post* reflètent de l'incertitude ; dans le second, elle représente de l'hétérogénéité *ex ante*.

La procédure d'estimation consiste à tester si les individus prennent en compte ces composantes, c'est à dire si les réalisations futures des gains expliquent les choix de scolarité. Si les individus ne réagissent pas aux différentes sources de variabilité des rendements futurs (ce qui se traduit par un effet non significatif de ces composantes de variance *ex post* sur les probabilités de poursuite et d'arrêt des études), cela signifie qu'elles n'étaient pas prévisibles au moment de prendre les décisions. Si les individus réagissent à certaines composantes de la variance future (effet significatif des composantes sur les choix de scolarité), cela implique qu'elles sont connues au moment des choix. Cunha, Heckman et Navarro (2005) estiment que 40% de la variabilité *ex post* des rendements de l'éducation est imprévisible. Cette part mesure la véritable incertitude à laquelle font face les individus lorsqu'ils doivent décider d'arrêter ou de poursuivre leurs études. L'incertitude a des conséquences importantes puisque beaucoup d'individus auraient changé leur décision de scolarité s'ils avaient pu parfaitement prévoir le futur (entre 25% et 30%). Néanmoins, 60% de la dispersion des rendements de l'éducation est prévisible. Elle est due à de l'HNO *ex ante*, portant essentiellement sur les coûts psychologiques de l'éducation. L'existence de tels coûts expliqueraient pourquoi certains lycéens américains qui anticipent des rendements bruts élevés ne poursuivent pas à l'université.

Cette série de travaux est très convaincante en ce qui concerne la séparation de ce qui et prévisible et pris en compte par les individus dans leur décision de ce qui n'est pas pris en compte : les chocs imprévisibles ou la chance et les erreurs des mesures que l'on commet lors de l'estimation du modèle. Reconstruire a posteriori l'ensemble d'information à partir duquel l'individu détermine ses choix est une avancée importante. Cependant, dans ces travaux, toutes les composantes de la dispersion *ex post* des rendements de l'éducation qui aident à expliquer les choix individuels sont assimilées à de l'hétérogénéité non observée. Pourtant, des individus averses au risque vont réagir face au risque. Rappelons que le risque caractérise un environnement dans lequel les réalisations des évènements sont inconnues, mais pas la distribution. Les paramètres de la distribution, la moyenne et la variance, sont connus par l'individu, qu'ils soient déterminés à partir d'anticipations objectives ou subjectives. Ainsi, les éléments de la variance *ex post* dans les modèles d'Heckman et al. (2003, 2005, 2007) auxquels réagissent les individus peuvent correspondre soit à de l'HNO soit à du risque.

À l'issue de ces modèles, on peut dire que le problème d'identification de l'HNO et du risque n'est pas résolu. Il est néanmoins fortement atténué par rapport à la littérature antérieure puisqu'il ne porte plus que sur une partie seulement de la dispersion observée des gains (environ 50%). On se rapproche de plus en plus de la véritable mesure empirique du risque au sens où nous l'avons défini dans la section précédente, sans encore l'atteindre.

Au terme de notre analyse, des pistes de recherche se dessinent. La stratégie d'estimation sur risque qui nous paraît la plus efficace consisterait à employer la méthode d'Heckman et al. (2003, 2005, 2007) pour déterminer dans un premier temps l'ensemble d'information des individus au moment de leurs choix, de façon à isoler tout ce qui est complètement imprévisible. Ensuite, l'enjeu économétrique est de réussir à séparer dans les composantes prévisibles de la variance, celles qui sont parfaitement connues par les individus (l'HNO) et celles qui font l'objet de prévision (le risque). De ce point de vue, la littérature empirique sur la compensation salariale, qui est directement dérivée de la théorie du capital humain apporte des éléments théoriques qui peuvent être utile à l'identification empirique. Elle nous enseigne en effet que seuls les risques entrepris font l'objet d'une compensation salariale. Les caractéristiques individuelles connues de leur détenteurs mais non observée par l'économètre ne seront pas compensées par le marché. Les efforts de recherche doivent être menés sur ces questions car nous avons montré qu'elles cristallisent les principales difficultés techniques.

Obtenir une mesure non biaisée du risque et estimer son effet sur les choix éducatifs n'est techniquement pas à la portée de cette thèse. Face à cette difficulté, nous abordons le problème de la manière inverse. En effet, notre objectif est de repartir de notre modèle théorique développé précédemment dont on connaît la structure de la variance *ex ante*. Nous allons essayer dans la section suivante de dériver l'équation de Mincer correspondante à notre modèle et voir comment les déterminants de notre variance *ex ante* se retrouvent dans la variance contemporaine des gains. Nous tentons ensuite d'identifier leurs effets.

4.4. Dérivation et identification du modèle empirique

Partant du constat déduit de notre synthèse établie dans la section précédente, à savoir qu'il est très compliqué de mesurer empiriquement le risque *ex ante* à partir de la dispersion des gains observés, nous repartons de notre modèle théorique précédent qui nous enseigne comment l'individu réagit face au risque. Si l'on connaît a priori la structure du risque *ex ante* et *ex post* en théorie, on ne peut l'observer en pratique. En effet, on ne peut observer l'individu au moment où il prend ses décisions. Et donc on ne peut pas connaître le risque auquel il fait face. On observe uniquement l'individu sur le marché du travail une fois qu'il a définitivement établi ses choix éducatifs.

Si l'on parvient à dériver l'équation de Mincer à partir de notre modèle théorique et que l'on arrive à identifier dans la variance des gains observés les paramètres de notre modèle théorique de départ, alors on peut savoir quel est l'impact de l'éducation sur la variance *ex ante* et par conséquent répondre à la question théorique centrale de notre thèse, à savoir : l'éducation doit-elle être considérée comme un actif risqué ou comme un dispositif révélateur des compétences productives ?

Nous partons de l'équation (3.5) du chapitre précédent qui décrit l'évolution de la productivité dans le cas le plus simple dans lequel une seule source d'incertitude est prise en compte. La valeur marchande de la productivité étant supposée connue, cette équation décrit l'évolution du salaire perçu par l'individu[10]. Nous supposons que l'incertitude sur le rendement de l'éducation ne dépend que du risque concernant l'efficacité de l'investissement dans l'éducation : l'individu ne connaît pas le salaire associé à son niveau d'éducation car il ne connaît pas parfaitement à l'avance le volume des compétences que va générer son investissement. Pour savoir si l'éducation a les propriétés d'un investissement risqué ou si elle a une fonction informationnelle, nous modifions légèrement l'équation (3.5) de la façon suivante :

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = \mu_\theta \lambda(t)\, dt + (a + b\lambda(t))\, \sigma_\theta dZ(t) \tag{4.1}$$

Nous introduisons deux paramètres a et b tels que $a > 0$ et $b \geqslant -a\sigma_\theta$, ce qui assure que $(a + b\lambda(t))\, \sigma_\theta \geqslant 0$, c'est-à-dire que la volatilité du rendement de l'investissement dans l'éducation soit toujours positive.

Ce qui nous importe en premier lieu, c'est de connaître le signe du paramètre b. Si $b > 0$, l'éducation accroît la dispersion du rendement. Dans ce cas, elle sera considérée comme un actif risqué. Si $b < 0$, l'éducation réduit la dispersion du rendement et dans

[10]Nous rappelons que dans le modèle de capital humain le salaire est égal à la productivité marginale du travail, c'est-à-dire au montant du capital humain accumulé par l'individu.

ce cas, elle pourra être considérée comme un signal de compétences. Nous essayons également d'identifier la valeur du risque *ex ante* sur l'efficacité de l'investissement en éducation σ'_θ.

La première étape de notre stratégie d'identification consiste à dériver correctement l'équation de Mincer à partir de cette équation théorique (4.1). Nous commençons par réécrire l'équation (4.1) en temps discret :

$$Q_{t+1} = [1 + \mu_\theta \lambda_t + (a + b\lambda_t)\, \sigma_\theta \epsilon_t]\, Q_t \tag{4.2}$$

En prenant le logarithme de cette équation (4.2), pour approximer le rendement du capital humain, et en utilisant l'approximation $\ln(1+x) \simeq x$, on obtient :

$$\ln Q_t = \mu_\theta \lambda_{t-1} + (a + b\lambda_{t-1})\, \sigma_\theta \epsilon_{t-1} + \ln Q_{t-1} \tag{4.3}$$

En itérant on a :

$$\ln Q_t = \sum_{\tau=1}^{t} [\mu_\theta \lambda_{\tau-1} + (a + b\lambda_{\tau-1})\, \sigma_\theta \epsilon_{\tau-1}] + \ln Q_0$$

En décomposant la somme, on obtient :

$$\ln Q_t = \mu_\theta \sum_{\tau=1}^{t} \lambda_{\tau-1} + \sum_{\tau=1}^{t} (a + b\lambda_{\tau-1})\, \sigma_\theta \epsilon_{\tau-1} + \ln Q_0 \tag{4.4}$$

La dérivation de l'équation de Mincer implique de décomposer l'investissement dans le capital humain sur le cycle de vie en deux périodes. Une période de scolarité durant laquelle l'individu est supposé consacrer tout son temps disponible à l'éducation, et une période de travail, durant laquelle il continue à se former à travers son expérience professionnelle mais à un rythme décroissant tout au long de sa carrière professionnelle. Ce principe reflète la propriété du rendement marginal décroissant du capital humain sur le cycle de vie. Au fur et à mesure que l'individu s'approche de la fin de sa carrière professionnelle, sa période de rentabilisation de son investissement baisse.

Pour intégrer cette propriété de l'investissement dans le capital humain, on pose :

$$\begin{aligned}
\lambda_{\tau-1} &= 1 \text{ pour tout } \tau \leq S \\
\lambda_{\tau-1} &= d - \frac{d}{n}(\tau - S) = d - \frac{d}{n}Exp \text{ pour tout } \tau > S
\end{aligned} \tag{4.5}$$

avec $(\tau - S) = Exp$. La variable Exp mesure nombre d'années d'expérience professionnelle. d est une constante positive et n mesure la durée totale que l'individu passe sur le marché du travail au cours de son cycle de vie (par exemple 40 ans en France pour les travailleurs du secteur privé). Nous utilisons également l'approximation suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau=S+1}^{t}\left[d - \frac{d}{n}((\tau - S))\right] &\simeq d(\tau - S) - \frac{d}{2n}(\tau - S)^2 \\
&\simeq dExp - \frac{d}{2n}Exp^2
\end{aligned} \tag{4.6}$$

La décomposition du cycle de vie, à partir de l'équation (4.5) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\ln Q_t &= \ln Q_0 + \mu_\theta\left(\sum_{\tau=1}^{S}\lambda_{\tau-1} + \sum_{\tau=S+1}^{t}\lambda_{\tau-1}\right) \\
&\quad + \left(\sum_{\tau=1}^{S}(a + b\lambda_{\tau-1})\,\sigma_\theta\epsilon_{\tau-1} + \sum_{\tau=S+1}^{t}(a + b\lambda_{\tau-1})\,\sigma_\theta\epsilon_{\tau-1}\right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

En remplaçant les expressions (4.6) et l'approximation (4.7) dans l'équation (4.8) on obtient en réarrangeant :

$$\begin{aligned}
\ln Q_t &= \ln Q_0 + \mu_\theta S + \mu_\theta dExp - \mu_\theta\frac{d}{2n}Exp^2 \\
&\quad + \left((a+b)\,\sigma_\theta\sum_{\tau=1}^{S}\epsilon_{\tau-1} + \left[(a+bd) - \frac{bd}{n}Exp\right]\sigma_\theta\sum_{\tau=S+1}^{t}\epsilon_{\tau-1}\right)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

On définit le salaire courant perçu par l'individu pour la période t comme le produit du salaire unitaire et du temps de travail $(1-\lambda_t)$ c'est-à-dire le temps qui n'est pas consacré à la formation.

On pose $Y_t = Q_t\,(1-\lambda_t)$ d'où :

$$\ln Y_t = \ln Q_t + \ln(1-\lambda_t) \tag{4.9}$$

Ou encore, en utilisant l'approximation $\ln(1-\lambda_t) \simeq -\lambda_t$, et en remplaçant λ_t par sa valeur[11] $d - \frac{d}{n}Exp$, on obtient :

$$\begin{aligned}\ln Y_t &= (\ln Q_0 - d) + \mu_\theta S + \left(\mu_\theta d + \frac{d}{n}\right) Exp - \mu_\theta \frac{d}{2n} Exp^2 \\ &\quad + \left((a+b)\,\sigma_\theta \sum_{\tau=1}^{S} \epsilon_{\tau-1} + \left[(a+bd) - \frac{bd}{n}Exp\right] \sigma_\theta \sum_{\tau=S+1}^{t} \epsilon_{\tau-1}\right)\end{aligned} \tag{4.10}$$

Cette équation est une équation de Mincer, dont la distribution des résidus présente une structure hétéroscédastique particulière, qui reflète le risque *ex ante* portant sur l'efficacité de l'éducation introduit dans le modèle. Mais, elle provient aussi de l'endogénéité de la volatilité (le risque) causée par l'investissement dans l'éducation.

Notre stratégie d'identification se fait en deux étapes. Dans la première étape, nous estimons une équation de gains du type :

$$\ln Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 S_{it} + \beta_2 Exp_{it} + \beta_3 Exp^2 + \nu_{it}$$

avec

$$\mu^\theta = \beta_1, \ln E_0 = \beta_0 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}, d = \frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{n}{n+1} \tag{4.11}$$

Tous les paramètres sont identifiés : $\mu^\theta = \beta_1$, ,

[11] Une fois que l'individu se trouve sur le marché du travail.

Une fois le modèle estimé par OLS, on récupère les résidus, dont on connaît la structure :

$$v_{it} = \left((a+b)\,\sigma_\theta \sum_{\tau=1}^{S} \epsilon_{\tau-1} + \left[(a+bd) - \frac{d}{n} Exp \right] \sigma_\theta \sum_{\tau=S+1}^{t} \epsilon_{\tau-1} \right) + \varepsilon_{it} \tag{4.12}$$

On calcule alors la variance des résidus[12] :

$$Var\left(v_{it}\right) = (a+b)^2 \sigma_\theta^2 \sum_{\tau=1}^{S} \left[Var\left(\epsilon_{\tau-1}\right)\right] + \left[(a+bd) - \frac{bd}{n} Exp \right] \sigma_\theta \sum_{\tau=S+1}^{t} \left[Var\left(\epsilon_{\tau-1}\right)\right] + Var\left(\varepsilon_{it}\right) \tag{4.13}$$

Soit :

$$Var\left(v_{it}\right) = (a+b)^2 \sigma_\theta^2 S + (a+bd)^2 \sigma_\theta^2 Exp - 2\,(a+bd)\, \frac{bd}{n} \sigma_\theta^2 Exp^2 + \frac{b^2 d^2}{n^2} \sigma_\theta^2 Exp^3 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{4.14}$$

Il est important de noter que le paramètre associé à S : $(a+b)^2\,\sigma_\theta^2$ qui mesure la contribution de la scolarité à la variance du rendement de l'éducation, ne mesure pas le risque qui nous intéresse. En effet, notre intérêt se porte sur le risque marginal, c'est-à-dire le risque auquel fait face l'individu au moment des choix. Or ici, le paramètre $(a+b)^2\,\sigma_\theta^2$ mesure le risque cumulé durant la période de scolarité par construction de l'équation de Mincer. En effet, il est égal à la somme des rendements marginaux associés à chaque année de scolarité passée dans le système éducatif. C'est pourquoi ce paramètre est toujours positif. Même si le risque marginal baisse avec l'éducation, indiquant un rôle protecteur de l'éducation (effet signal), le coefficient associé à S augmente, puisque un risque ne peut être que positif. La critique d'Hecman et al. (2003, 2005, 2007) prend ici tout son sens.

Dans la seconde étape, nous régressons la variance des résidus :

[12]On suppose que la covariance entre l'éducation et l'expérience professionnelle est nulle. Cette simplification ne change pas l'identification du risque sur l'efficacité de l'éducation σ_θ et le signe de b.

$$Var\left(\widehat{\upsilon_{it}}\right) = \gamma_0 + \gamma_1 S_{it} + \gamma_2 Exp_{it} + \gamma_3 Exp_{it}^2 + \gamma_4 Exp_{it}^3 + \upsilon_{it} \tag{4.15}$$

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2; \gamma_1 = (a+b)^2\,\sigma_\theta^2; \gamma_2 = (a+bd)^2\,\sigma_\theta^2; \gamma_3 = -2\,(a+bd)\,\frac{bd}{n}\sigma_\theta^2; \gamma_4 = \left(\frac{bd}{n}\right)^2\sigma_\theta^2 \tag{4.16}$$

En utilisant la valeur du paramètre d issue de l'estimation de la première étape et en utilisant γ_4, on trouve :

$$b^2\sigma_\theta^2 = \frac{n^2\gamma_4}{\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{n}{n+1}\right)^2}$$

A partir du calcul de $\gamma_2 - \gamma_1$ et en intégrant le résultat ci-dessus nous déduisons la valeur de $ab\sigma_\theta^2$, qui est fondamentale pour notre analyse :

$$ab\sigma_\theta^2 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1 - n^2\gamma_4\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{n}{n+1}\right)^2}\right)}{2\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{n}{n+1} - 1\right)} \tag{4.17}$$

Au delà de la valeur de ce produit de paramètres $ab\sigma_\theta^2$, c'est le signe de $ab\sigma_\theta^2$ qui nous intéresse au premier plan. En effet, le paramètre b est du même signe que $ab\sigma_\theta^2$ puisque a et σ_θ^2 sont obligatoirement positifs par définition (σ_θ^2 est l'écart-type de l'efficacité de l'éducation et le signe positif de la constante a assure un signe positif pour le risque *ex ante* associé au rendement de l'éducation).

En identifiant le signe de b nous avons répondu à la question centrale posée au début de cette section.

Nous clôturons, cette section sur ce résultat. L'estimation de ce modèle pour évaluer le signe du paramètre b, s'effectuera à la première occasion. La poursuite et les prolongements de cette stratégie d'estimation sont évidents. La prochaine étape consiste à essayer d'identifier le risque *ex ante* (σ_θ^2), puis d'intégrer une composante d'hétérogénéité, etc.

4.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous portons notre attention au traitement économétrique de la relation entre l'éducation et le risque. Peu de travaux, au regard de la littérature abondante sur l'évaluation des rendements de l'éducation, ont essayé de prendre en compte la nature risquée des rendements. Pourtant, nous avons vu que le risque, en théorie, pouvait influencer fortement les décisions d'investissement dans l'éducation. En présence de risque, les rendements moyens et marginaux de l'éducation sont différents de sorte que l'estimation de l'effet "causal" de l'éducation sur les gains est biaisée si le risque n'est pas pris en compte.

Il y a principalement trois méthodes pour étudier économétriquement la relation éducation-risque. Les modèles hétéroscédastiques mesurent l'impact de l'éducation sur la dispersion des rendements. Les résultats sont relativement peu contrastés et montrent que la variance est fortement réduite lorsque l'éducation augmente. Tous les autres travaux, à commencer par la littérature sur la compensation salariale mesurent l'impact de la variance des rendements sur les salaires ou les choix de scolarité. Les modèles de compensation salariale obtiennent des résultats homogènes dans un cadre statique ou dynamique. Enfin, d'autres travaux estiment l'effet de la variance des salaires sur les choix scolaires. En général, une variance élevée du rendement pénalise la poursuite des études.

Sur la base de cette lecture, la littérature a tendance à valider la théorie du capital humain. Malgré les avancées réalisées sur le traitement des biais de sélection, d'endogénéité de l'éducation, d'hétérogénéité non observée et d'erreurs de mesures, des problèmes spécifiques d'identification se posent lors de l'estimation de la relation éducation-risque. Au départ, ces problèmes proviennent du fait que la variance observée des rendements de l'éducation ne reflète pas uniquement le risque associé à l'éducation. Elle résulte de l'effet de facteurs non observés, d'erreurs de mesure et de chocs imprévus par les individus. La difficulté de fond est de parvenir à isoler l'effet du risque des autres sources de variabilité. La méthode originale d'Heckman et al. (2003, 2005, 2007) de traitement du biais de sélection permet de restreindre le problème d'identification mais ne le résous pas complètement. L'effet du risque et celui de l'hétérogénéité doivent être identifiés. Cela dépend des hypothèses faites sur connaissance que possède l'individu.

D'une manière générale, la mesure empirique du risque pose de nombreuses questions auxquelles la littérature n'a pas encore apporté toutes les réponses. L'absence de données adéquates impose de déduire le risque en recourant à méthodes toujours plus complexes. On peut émettre l'idée que cette difficulté à définir le risque marginal provient d'une absence de référence à une théorie du risque, pouvant offrir des restrictions utiles au processus d'identification des variables. Nous montrons d'ailleurs que c'est grâce au modèle théorique du chapitre précédent que l'on peut établir une relation empirique entre le risque *ex ante*, le risque *ex post* et l'éducation. A partir de la dérivation de l'équation de gains de notre modèle théorique et de la régression de la variance des résidus, nous montrons dans le cas le plus simple qu'il est possible de signer l'effet de l'éducation sur la variance *ex ante* des rendements à partir de la dispersion *ex post*. Nous pouvons alors savoir si l'éducation peut être assimilée à un actif risqué ou à un signal réducteur d'incertitude.

Notre travail doit être envisagé comme le point de départ d'une évaluation empirique de la relation entre l'éducation et le risque.

CHAPITRE 5

Conclusion générale

Cette thèse contribue à l'enrichissement de la théorie du capital humain. Nous plaçons l'analyse dans un cadre où l'information sur le rendement futur du capital humain, à partir de laquelle l'individu fonde ses choix, est imparfaite. Dans ce cadre, notre objectif est d'étudier l'impact du risque sur les stratégies d'investissement dans le capital humain.

La synthèse des principaux modèles théoriques établie dans le premier chapitre de la thèse ne nous fournit pas de réponse claire quant à l'effet du risque sur l'investissement dans le capital humain. En effet, dans les modèles à deux périodes, lorsque l'offre de travail est endogène la règle de décision établie par les modèles d'offre de travail exogène, fondée sur la corrélation entre le rendement moyen et le rendement marginal du capital humain, n'est plus valide (à cause d'un effet revenu). Cette indétermination de l'effet du risque semble provenir de l'agrégation de différentes sources d'incertitude pouvant avoir un impact contradictoire sur le comportement d'investissement, dans la mesure où les modèles dynamiques, qui étudient l'effet de sources différentes obtiennent des résultats différents. En effet, dans les modèles où le risque porte uniquement sur l'acquisition des compétences, l'augmentation du risque a un impact négatif sur l'investissement. A l'inverse, dans les modèles où le risque concerne uniquement le salaire, l'impact sur la demande d'éducation est positif.

Dans le deuxième chapitre de la thèse, nous montrons pourquoi ces différentes sources d'incertitude ont un impact différent sur l'investissement optimal dans le capital humain. Dans le modèle néoclassique de capital humain, l'individu est rémunéré à la valeur de sa productivité marginale. L'incertitude qui porte sur le salaire peut résulter soit du risque associé au volume des compétences accumulées, soit du risque associé à la valeur que le marché attribue à ces compétences, soit des deux sources simultanément. Si les individus ne réagissent pas de la même façon à ces deux sources de risques, on comprend l'effet contrasté que peut avoir le risque sur le salaire sur l'investissement dans le capital humain, selon que l'une ou l'autre des sources d'incertitude domine. Le modèle dynamique que nous développons dans ce chapitre permet d'étudier l'effet de chaque déterminant du risque sur le salaire (efficacité, dépréciation et prix des compétences). Nous étudions également l'effet du risque de chômage sur la décision d'investir.

De manière générale, l'augmentation des risques conduit à une baisse de l'investissement dans le capital humain. Parce que l'éducation dans ce type de modèle accentue l'exposition *ex ante* de l'individu au risque, la prime de risque escomptée par l'individu ne permet pas de compenser le besoin de couverture contre le risque qui incite l'individu à réduire son éducation. Seuls les risques concernant la valorisation du capital humain sur le marché du travail, génèrent une prime de risque suffisante pour inciter l'individu à investir davantage dans le capital humain. Ainsi, à partir du moment où l'on suppose que les déterminants de la productivité individuelle ne sont pas parfaitement connus, le modèle de capital humain ne permet pas d'interpréter la hausse de la scolarisation dans l'enseignement supérieur observé en France au milieu des années 1980 comme une réponse à un besoin de protection face au risque de chômage.

Dans le troisième chapitre de la thèse, nous définissons les conditions sous lesquelles il est possible de montrer que les individus ont intérêt à augmenter leur niveau d'éducation pour se protéger du risque. Ce résultat ne peut s'obtenir qu'à la condition de considérer l'éducation comme un signal réducteur d'incertitude. Plus précisément, nous supposons que l'éducation a un double rôle : un rôle productif et un rôle informationnel. Elle augmente la productivité moyenne du travail (hypothèse de capital humain) et améliore la connaissance de cette productivité (hypothèse de signal). Nous réévaluons l'impact des différentes sources d'incertitude. Nous montrons que les stratégies optimales d'éducation sont inversées par rapport au cas où l'éducation est considérée comme un actif risqué. En particulier, nous montrons que les individus sont prêts à sacrifier une partie de leur rendement en échange de la couverture contre le risque que leur fournit l'éducation. C'est un résultat important de notre travail.

La contribution de notre thèse est avant tout théorique. Nous retenons que dans un monde d'incertitudes, selon l'effet de l'éducation sur la variance de son rendement, la nature de l'arbitrage entre présent et futur est différent, de sorte que les stratégies optimales d'éducation vont être profondément affectées.

Cette conclusion nous amène dans le dernier chapitre de la thèse à essayer de construire une procédure d'estimation de cette relation entre l'éducation et le risque qui lui est associé.

Les travaux empiriques sur la relation entre l'éducation et le risque apparaissent très dispersés, tant du point de vue de la définition du risque, que des méthodes d'estimation employées et aussi des résultats obtenus. A partir de cette lecture de la littérature, nous proposons une définition empirique du risque au regard de laquelle nous discutons des problèmes que soulève l'estimation du risque. Le problème majeur réside dans l'identification du risque dans la variance observée des rendements éducatifs. La grande difficulté est de parvenir à séparer la contribution du risque et celle de l'hétérogénéité non observée dans la variance, c'est-à-dire la partie de la variance qui est prédite par l'individu et non observée par l'économètre (le risque) et la partie de la variance connue par l'individu mais non observée par l'économètre (l'hétérogénéité non observée). Cette difficulté est augmentée par le fait que la variance observée des salaires est une indication du risque pour les individus qui sont dans le système éducatif. Pour les individus que l'on observe, cette variance n'est pas la même que celle à laquelle ils ont fait face lorsqu'ils étaient dans le système scolaire. Il est possible de retrouver cette variance *ex ante* mais au prix d'une correction du biais de sélection très compliquée.

Dans la dernière section de la thèse, nous présentons les prémisses d'une stratégie d'estimation non biaisée de la relation éducation-risque en adoptant une stratégie inverse par rapport à celles proposées dans la littérature. Nous partons de notre modèle théorique dont nous connaissons la structure de la variance a priori, qui dépend du risque *ex ante* et de l'éducation.

Notre objectif est de dériver une équation de gains à partir de notre modèle théorique dont on connaît la structure de la variance a priori et d'essayer d'identifier la contribution de chacun des paramètres à la variance observée. Nous montrons dans le cas le plus simple possible (une seule source d'incertitude et absence d'hétérogénéité non observée) que l'on peut déduire à partir de la variance observée des salaires le signe de l'effet de l'éducation sur la variance *ex ante* des rendements. Ainsi, nous montrons qu'il est possible de répondre à la question centrale de la thèse : l'éducation est elle un investissement risqué ou bien révèle-t-elle la productivité inconnue des individus ?

Ce résultat nous encourage à estimer ce modèle, à poursuivre l'identification d'autres sources d'incertitude et surtout d'intégrer une composante d'hétérogénéité non observée.

Ces prolongements sont autant de limites à la portée de ce résultat. En particulier, si notre tentative d'identification des sources de risque *ex ante* se révèle infructueuse, à cause de l'introduction de l'hétérogénéité non observée, il faudra sans doute se tourner vers les modèles structurels dynamiques de choix d'éducation[1] pour évaluer le rendement marginal de l'éducation à chaque date.

Au plan théorique, plusieurs extensions de notre travail sont possibles.

Il peut être utile d'intégrer aux modèles développés dans cette thèse des processus à "saut", caractérisant des changements aléatoires ponctuels, afin de mieux caractériser les discontinuités et les transitions pouvant exister dans le processus d'accumulation de capital humain (échec scolaire, transition) et sur le marché du travail (mobilité professionnelle).

[1]Développés notamment par Eckstein et Wolpin (1989), Keane et Wolpin (1997), ou encore Belzil et Hansen (2002).

Par ailleurs, la thèse accorde peu de place aux modèles d'option réelle. Le bilan dressé dans le premier chapitre nous a conduit à préférer les modèles de portefeuille, plus généraux et permettant de prendre en compte plusieurs sources d'incertitude. En revanche, les modèles d'option ont une formulation élégante et intuitive très proche des modèles de scolarité que l'on a l'habitude de manipuler en économie de l'éducation et offrent une interprétation alternative à la relation entre l'éducation et le risque. Il nous parait intéressant de développer les modèles d'option en intégrant l'incertitude sur l'accumulation de l'éducation, de manière à endogénéiser l'incertitude et à rendre comparables les stratégies éducatives obtenues avec celles de nos modèles.

Enfin, dans la mesure où l'étude de la relation entre l'investissement dans le capital humain et le risque emprunte beaucoup à la finance, de nouvelles questions sont apparues au cours de la thèse. Jusqu'ici, les raisonnements théoriques ont été menés dans le cadre d'une économie réelle. Or, il semble établi en finance qu'à l'équilibre macroéconomique les individus détiennent de la monnaie, soit car ils en retirent une certaine utilité, soit pour prévenir un besoin de liquidité. Dès lors que la monnaie existe, il est possible qu'elle ait une influence sur l'économie réelle et en particulier sur la demande d'éducation. Il se peut que la monnaie ne soit pas neutre. Une des extensions possibles de la thèse est d'expliquer par quels mécanismes la politique monétaire peut avoir un impact sur la demande d'éducation, les salaires, et *in fine* sur la croissance économique. Au plan macroéconomique, cette perspective est tout à fait intéressante notamment pour les pays à fort taux d'inflation.

Bibliographie

[1] **Aghion P. et Howitt P. (1998)**, *Endogenous Growth theory*, MIT Press, Cambridge, traduction française, Dunod, Paris.

[2] **Akerlok G. A (1970)**, "The Market for "Lemons" : Qualitative Uncertainty and the Market Mechanism", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 84, Issue 3, 488-500.

[3] **Altonji J. (1993)**, "The Demand for and Return to Education When Education Outcomes Are Uncertain", *Journal of Labour Economics*, **11** (1), 48-83.

[4] **Arrow K. (1973)**, "Higher Education as a filter", *Journal of Public Economics*, **3**, 193-216.

[5] **Azariadis S.et A. Drazen (1990)**, "Threshold in Economic Development", *Quarterly Journal of Economy*, **105**, 501-526.

[6] **Baudelot C. et Leclercq F. (2004)**, *Les effets de l'éducation*, Rapport à l'attention du Piref, La documentation, française, 272 pages.

[7] **Becker G. (1962),** "Investment in Human Capital : A Theoretical Analysis", *Journal of Political Economy,* **75**(5), 9-49.

[8] **Becker G. (1993)**, *Human Capital : A Theorical and Empirical Analysis with Special Reference to Education*. University of Chicago Press, Première édition 1964, Seconde édition 1975.

[9] **Becker G. (1997)**, "Why a Crash Wouldn't Cripple the Economy", *Business Week*, April 14.

[10] **Becker G. et N. Tomes (1979)**, "An equilibrium theory of the distribution of income and intergenerational mobility", *Journal of Political Economy,* **87**(6), 1153-1189.

[11] **Belzil C. et J. Hansen (2002)**, "Unobserved ability and the return to schooling", *Econometrica*, **70**(5), 2075-2091.

[12] **Belzil C. et J. Hansen (2004)**, "Risk Aversion, Education and Earnings Dispersion", *Research in Labor Economics*, Vol. **23**, 335-358.

[13] **Belzil C. et M. Leonardi (2007)**, "Can risk aversion explain schooling attainments ? Evidence from Italy", *Labour Economics*, **14** (6), 957–970.

[14] **Benabou R. (1996)**, "Heterogeneity, Stratification et Growth : Macroeconomic Implication of Community Structure and School Finance", *American Economic Review*, **86**(3), 584-609.

[15] **Ben-Porath Y. (1967)**, "The production of human capital and the life cycle of earnings". *Journal of Political Economy*, **75**, 352-365.

[16] **Bourdieu P. (1966)**, "La transmission de l'héritage culturel", dans Darras, *Le partage des bénéfices*, Minuit.

[17] **Capozza D. et Helsley R. (1990)**,"The stochastic city", *Journal of Urban Economics*, Vol. **28**, Issue 2, September 1990, Pages 187-203.

[18] **Card D. (2001)**, "Estimating the return to schooling : progress on some persistent econometric problems". *Econometrica*, **69** (5), 1127-1160.

[19] **Carneiro P., K. Hansen et J. Heckman (2003),** "Estimating Distributions of Counterfactuals with an Application to the returns to Schooling and measurement of the Effects of uncertainty on Schooling Choice", *International Economic Review*, **44**, 361-422.

[20] **Chapman P.G. (1993),** The Economics of Training, Harvester-Wheatsheaf, London.

[21] **Chen S. (2008)**, "Estimating the Variance of Wages in the Presence of Selection and Unobserved Heterogeneity", *Review of Economics and Statistics*, **90**, 275-289.

[22] **Chiang A.C. (1992)**, *Elements of Dynamic Optimisation.* McGraw-Hill, Inc.

[23] **Cunha F., Heckman J. et S. Navarro (2005)**, "Separating Uncertainty from Heterogeneity in Life Cycle Earnings" Hicks Lecture, Oxford University, April 2004 ; *Oxford Economics Papers*, **57**, 191-261 .

[24] **Cunha F. et J. Heckman (2007)**, "Identifying and Estimating the Distributions of *ex post* and *ex ante* Returns to Schooling", *Labour Economics*, **14**(6), 870-893.

[25] **Denison E.F (1962)**, *The sources of Economic growth in US and the alternatives before US.* Commity for Economic development, New-York.

[26] **Diaz Serrano L., Hartog J. et H.S. Nielsen (2008)**, "Compensatingwage differentials for schooling risk inDenmark", *Scandinavian Journal of Economics*, **110**(4), 711-731.

[27] **Dixit A. K. (1993)**, *The Art of Smooth Pasting.* Harwood Academic Pubilsher.

[28] **Dixit A. K. et Pindick R. S. (1994)**, *Investment under uncertainty.* Princeton University, Princeton , New Jersey.

[29] **Dominitz J. et C. Manski (1996)**, "Eliciting Student Expectations of the Return to Schooling", *Journal of Human Resources*, **31**, 1-26.

[30] **Eckstein Z. et K.I. Wolpin (1999)**, "Why youths drop out of high school : The impact of preferences, opportunities, and abilities", *Econometrica*, **67**(6), 1295-1339.

[31] **Fama E.F. et G.W. Schwert (1977)**, "Human Capital and Capital Market Equilibrium", *Journal of Financial Economics* **4**(1), 95-125.

[32] **Fan C. (1993)**, "Schooling as a job search process", *Economics Letters*, **41**, 85-91.

[33] **Fondeur Y. (1996)**, "Insertioin professionnelle des jeunes et cycle économique : quelques pistes de recherche". *Revue de l'IRES*, printemps-été, n°21, 37-71.

[34] **Forgeot G. et Gautié J. (1997)**, "Insertion professionnelle des jeunes et processus de déclassement". *Économie et Statistique*, **304-305**, 53-74.

[35] **Fondeur Y. et Minni C. (1999)**, "Emploi des jeunes et conjoncture", *Premières Synthèses*, Dares, n°51.1.

[36] **Gamel C. (2000a)**, "Et si l'université n'était qu'un "filtre" ? Actualité du modèle d'Arrow", *Economie Publique*, **2**, 41-69.

[37] **Gamel C. (2000b)**, "Le diplôme, un "signal" en voie de dépréciation ? Le modèle de Spence réexaminé", *Revue d'Economie Politique*, 110(**1**), 53-84.

[38] **Giret J-F. et Hatot C. (2001)**, "Mesurer le déclassement à l'embauche : l'exemple des DUT et des BTS". *Formation-Emploi*, **75**, 59-73.

[39] **Griliches Z. (1977)**, "Estimating the return to schooling : some econometric problems", *Econometrica*, **45**, 1-22.

[40] **Hanchane S. et F. Stankiewicz (2004)**, "Approche organisationnelle de la formation : au-delà de la problématique beckerienne", *Formation-emploi*, **85**, 23-40.

[41] **Harmon C., V. Hogan et I. Walker (2003)**, "Dispersion in the Economic Return to Schooling", *Labour Economics*, **10** (2), 205-214.

[42] **Hartog J., Plug E., Diaz-Serrano L. and J. Vieira (2003)**, "Risk compensation in wages - a replication", *Empirical Economics*, **28**, 639-647.

[43] **Hartog J. et W. Vijverberg (2007)**, "On Compensation for Risk Aversion and Skewness Affection in Wages", *Labour Economics*, **14**(6), 938-956.

[44] **Hartog J. et L. Diaz Serrano (2007)**, "Earnings risk and demand for higher education", *Journal of Applied Economics*, **10** (1), 1-28.

[45] **Hause J.C. (1974),** "The risk element in occupational and educational choices : comment", *Journal of Political Economy,* **82**(4), 803-807.

[46] **Heckman J. (1976)**, "A life cycle model of earnings learning and consumption". *Journal of Political Economy*, **84**, 511-544.

[47] **Heckman J., Lochner L. et P. Todd (2005),** "Earnings Functions, Rates of Return, and Treatment Effects : The Mincer Equation and Beyond", in : E. Hanushek and F. Welch, *Handbook of the Economics of Education,* Vol. 1, Amsterdam : Elsevier-North Holland.

[48] **Hogan V. et Walker I. (2007)**, "Education choice under uncertainty : Implications for public policy", *Labour Economics*, **14**(6) 894-912.

[49] **Kamien M. et Schwartz N. (1991)**, *Dynamic Optimization : The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management.* 2nd edition, North-Holland.

[50] **Kast R. (1993)**, *La théorie de la décision. Repères.* La Découverte.

[51] **Keane M.P. et K.I.Wolpin (1997),** "The career decisions of young men", *Journal of Political Economy*, **105**(3), 473-522.

[52] **King A. (1974)**, "Occupational choice, risk aversion and wealth", *Industrial and Labor Relations Review*, **27**, 586-596.

[53] **Kirsch E. (1998)**, "Les nouveaux territoires de l'enseignement technique", *Bref*, Céreq, n°145.

[54] **Kodde D. (1986)**, "Uncertainty and the demand for education". *The Review of Economics and Statistics*, **68** (3), 460-467.

[55] **Kreps, D. M. (1996)**, *Leçons de théorie microéconomique.* PUF, *Finance.*

[56] **Laffont J-J. (1991)**, *Economie de l'Information et de l'Incertain.* Economica.

[57] **Landeras P. et J.M.P de Villareal (2005)**, "A Noisy Screening Model of Education", *Labour*, **19**(1), 35-54.

[58] **Lehvari D. et Weiss Y. (1974)**, "The effect of risk on the investment in human capital". *American Economic Review*, **64**(6), 950-963.

[59] **Leutenegger M-A. (1999)**, *Gestion de portefeuille et théorie des marchés financiers.* Economica, 2nde édition.

[60] **Liberman J. (1980**), "Human Capital and the Financial Market", *Journal of Business*, **53**(2), 165-191.

[61] **Low S. et Ormiston M. (1991)**, "Stochastic Earnings Functions, Risk, and the Rate of Return to Schooling", *Southern Economic Journal*, **57**(4), 1124-1133.

[62] **Lucas R. (1988)**, "On the mecanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, **22**, 3-42.

[63] **Magnac T. et D. Thesmar (2002)**, "Analyse ´economique des politiques ´educatives : l'augmentation de la scolarisation en France de 1982 à 1993.", *Annales d'Economie et de Statistique*, **66**, 1-35.

[64] **Mankiw, G. Romer P. et D. Weil (1992)**, "A Contribution to the Empirics ef Economics Growth", *Quarterly Journal of Economics*, **2**, 407-437.

[65] **Meghir C. et L. Pistaferri (2004)**, "Income Variance Dynamics and Heterogeneity", *Econometrica*, **72**(1), 1-32.

[66] **Merton R. (1971)**, "Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model". *Journal of Economic Theory*, **3**, 373-413.

[67] **Mincer J. (1958),** "Investment in Human Capital and Personal Income Distribution," *Journal of Political Economy*, **66**, 281-302.

[68] **Mincer J. (1974)**, *Schooling Experience and Earnings.* New-York : National Bureau of Economic Research.

[69] **McGoldrick K. (1995)**, "Do women recieve compensating wages for earnings risk ?", *Southern Economic Journal*, **62**, 210-222.

[70] **McGoldrick K. et J. Robst (1996)**, "The effect of worker mobility on compensating wages for risk", *Applied Economics*, **28**, 221-232.

[71] **Nelson R. et E. Phelps (1966)**, "Investment in Humans, Technologie diffusion, and Economic Growth", *American Economic Review*, **66**, 69-82.

[72] **Nickell S. et Bell B. (1997),** "Would cutting payroll taxes on the unskilled have a significant impact on unemployment ?", In : D. Snower and G. de la Dehesa, Eds, *Unemployment Policy Government Options for the Labour Market*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[73] **Nielsen H.S et A. Vissing-Jorgensen (2006)**, "The Impact of Labor Income Risk on Educational Choices : Estimates and Implied Risk Aversion", Working Paper.

[74] **Olson L., Shefrin H. M. et H. White H. (1979)**, "Optimal Investment in Schooling When Incomes Are Risky", *Journal of Political economy*, **87**, 522-539 .

[75] **Palacios-Huerta I. (2003),** "An Empirical analysis of the Properties of Human Capital Returns", *American Economic Review*, **93**(3), 948-964.

[76] **Pereira, P and P. Martins (2002)**, "Is there a return-risk link in education ?", *Economics Letters*, **75** (1), 31-37

[77] **Postel-Vinay F. et J-M. Robin (2002)**, "Equilibrium Wage Dispersion With Worker And Employer Heterogeneity", *Econometrica*, **70**(6), 2295-2350.

[78] **Ribeiro R.M. (2002)**, "Predictable Dividends and Returns", mimeo, University of Chicago.

[79] **Riley J.G. (1976)**, "Information, Srcreening and Human Capital", *American Economic Review*, **66**(2), 254-260.

[80] **Riley J.G. (1979)**, "Testing the Educational Sreening Hypothesis", *Journal of Political Economy*, **85**(5), Part 2 : Education and Income Distribution, pp S227-S252.

[81] **Riley J.G. (2001)**, "Silver Signals : Twenty-Five Years of Screening and Signalling", *Journal of Economic literature*, Vol. 39, No. 2, pp. 432-478.

[82] **Roger P. (1991)**, *Les outils de la modélisation financière.* Presses Universitaires de France.

[83] **Romer P. (1990)**, "Endogenous Technical Change", *Journal of Political Economy*, **98**(5), 41-55.

[84] **Rothschild M et Stiglitz J. E. (1970)**, "Increasing risk : I. A definition", *Journal of Economic Theory.* **2**, 225-243.

[85] **Rothschild M et Stiglitz J. E. (1971)**, "Increasing risk : II. Its economic consequences". *Journal of Economic Theory*, **3**, 66-84.

[86] **Santos T. et P. Veronesi (2001)**, "Labor Income and Predictable Stock Returns", mimeo, University of Chicago.

[87] **Schweri J., Hartog J. et S. Wolter (2009)**, "Do Students Expect Compensation for Wage Risk, IZA Discussion Paper No. 4069.

[88] **Shaw K. (1996)**, "An Empirical Analysis of Risk Aversion and Income Growth", *Journal of Labor Economics*, **14**, 626-653.

[89] **Snow A. et Warren R. S. (1990)**, "Human capital investment and labour supply under uncertainty". *International Economic Review*, **31**(1), 195-206.

[90] **Solow R. (1956)**, "Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, **70**, 65-94.

[91] **Spence M.A. (1973)**, "Job Market Signaling", *Quarterly Journal of Economics*, **87**(3), 355-379.

[92] **Stewart M.B. et Swaffield J.K. (1999),** "Low pay dynamics and transition probabilities". *Economica,* **66**, 23-42.

[93] **Stiglitz J. (1975)**, "The Theory of "Screening", Education, and the Distribution of Income", *American Economic Review*, **65**(3), 283-300.

[94] **Webbink D. et J. Hartog (2004)**, "Can students predict their starting salaries ? Yes !", *Economics of Education Review*, **23**(2), 103-113.

[95] **Weiss A. (1983)**,"A Sorting-cum-learning Model of Education", *Journal of Political Economy*, **99**(3), 420-442.

[96] **Weiss A. (1995)**, "Human Capital vs. Signaling explanation of Wages", *Journal of Economic Persectives*, **9**(4), 133-154.

[97] **Weiss Y. (1972)**, "The Risk Element in Occupational and Educational Choices", *Journal of Political Economy*, **80**(6), 1203-1213.

[98] **Weiss Y. (1986)**, "The determination of life cycle earnings : a survey". *Handbook of Labor Economics*, **1**, chap. 11, 603-640.

[99] **Werquin P. (1997)**, "1986-1996 : dix ans d'intervention publique sur le marché du travail des jeunes", *Économie et Statistique*, **304-305**, 121-136.

[100] **Williams J. T. (1979)**, "Uncertainty and the accumulation of human capital over the life cycle", *Journal of Business*, **52**(2), 521-548.

[101] **Willis R. J. (1986)**, "Wage determinants : a survey and reinterpretation of human capital earnig functions", *Handbook of Labor Economics*, **1**, chap. 10, pp. 525-602.

[102] **Willis R. J. et Rosen S. (1979)**, "Education and Self-Selection", *Journal of Political Economy*, **87**, 7-35.

ANNEXE A

Calcul de l'effet revenu sur l'investissement en capital humain

les conditions de premier ordre (1.12) et (1.13) impliquent les effets suivants :

$$\frac{dEV_{I_0}}{dI} = EV_{I_0I_0}\frac{dI_0}{dI} + EV_{I_0e}\frac{de}{dI} + E_IEV_{I_0} = 0 \tag{A.1}$$

$$\frac{dEV_e}{dI} = EV_{eI_0}\frac{dI_0}{dI} + EV_{ee}\frac{de}{dI} + E_IEV_e = 0 \tag{A.2}$$

De (A.1), on tire $E_IEV_{I_0} + EV_{I_0e}\frac{de}{dI} = -EV_{I_0I_0}\frac{dI_0}{dI}$ d'où

$$\frac{dI_0}{dI} = -\left(\frac{E_IEV_{I_0}}{EV_{I_0I_0}} + \frac{EV_{eI_0}}{EV_{I_0I_0}}\frac{de}{dI}\right) \tag{A.3}$$

En substituant (A.3) dans (A.2), on obtient

$$E_IEV_e + EV_{ee}\frac{de}{dI} - EV_{eI_0}\left(\frac{E_IEV_{I_0}}{EV_{I_0I_0}} + \frac{EV_{eI_0}}{EV_{I_0I_0}}\frac{de}{dI}\right) = 0 \tag{A.4}$$

soit

$$\left[EV_{ee} - \frac{[EV_{eI_0}]^2}{EV_{I_0I_0}}\right]\frac{de}{dI} = \frac{E_IEV_{I_0}EV_{eI_0}}{EV_{I_0I_0}} - E_IEV_e \tag{A.5}$$

Ce qui nous permet de tirer

$$\frac{de}{dI} = \frac{E_I(EV_{I_0}EV_{eI_0} - E_IEV_eEV_{I_0I_0}}{H} \tag{A.6}$$

avec $H = EV_{ee}EV_{I_0I_0} - [EV_{eI_0}]^2 > 0$ d'après les conditions de second ordre pour la maximisation de (1.11).

En notant que $E_I = \frac{dE}{dI}$, on peut réécrire (A.6) de la façon suivante

$$\frac{de}{dI} = \frac{E(EV_{I_0}\frac{dEV_{eI_0}}{dI} - E_I\frac{dEV_e}{dI}EV_{I_0I_0}}{H} \tag{A.7}$$

En remplaçant

$$\begin{aligned} EV_{I_0I_0} &= u_{I_0I_0} + (1+r)^2 Eu_{II} \\ \frac{dEV_{eI_0}}{dI} &= -(1+r)Eu_{II} \\ \frac{dEV_e}{dI} &= -\frac{EV_{eI_0}}{(1+r)} \end{aligned}$$

dans (A.7), on obtient :

$$\frac{de}{dI} = \frac{u_{I_0I_0}EV_{eI_0}}{(1+r)\,H} \tag{A.8}$$

Le signe de (A.8) dépend crucialement donc de celui de EV_{eI_0} (on sait d'après les conditions de second ordre que $H > 0$ et $u_{I_0I_0} < 0$) Or,

$$EV_{eI_0} = \frac{\partial EV_e}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial I_0} = -(1+r)\frac{\partial EV_e}{\partial I}$$

et

$$\frac{\partial EV_e}{\partial I} = -y_e' l_I Eu_I + y_0\,(\rho - (1+r)\,Eu_{II}) \tag{A.9}$$

Cela donne

$$\frac{de}{dI} = \frac{-(1+r)u_{I_0I_0}\,(-y_e' l_I Eu_I + y_0\,(\rho - (1+r)\,Eu_{II}))}{(1+r)\,H} \tag{A.10}$$

Comme $\frac{-y_e' l_I}{y_0} = \rho_I$ d'après (1.17), on en déduit la forme finale de l'effet revenu :

$$\frac{de}{dI} = \frac{u_{I_0 I_0}}{H} y_0 [((1+r) - \rho) E u_{II}) - \rho_I E u_I] \tag{A.11}$$

Sachant que $H > 0, u_{I_0 I_0} < 0, E u_I > 0, E u_{II} < 0$ et $\rho_I < 0$, on peut conclure que :

• Si $de/dI < 0$, alors l'investissement en capital humain est inférieur. Cela implique que $(1+r) - \rho < 0$, c'est-à-dire $\rho > (1+r)$. Or $\rho > (1+r)$ implique que $\rho_\mu > 0$ d'après l'équation (1.16). Cela signifie que l'accroissement du risque conduit à une réduction de l'investissement en capital humain.

• Si $de/dI > 0$, alors l'investissement en capital humain est normal. Dans ce cas, on ne peut pas déterminer l'effet du risque sans ambiguïté. En effet, $\rho_\mu < 0$ est une condition nécessaire mais non suffisante pour identifier l'effet global du risque sur l'investissement en capital humain. Il est également nécessaire que $|((1+r) - \rho) E u_{II})| > |\rho_I E u_I|$.

ANNEXE B

Résolution du problème de contrôle optimal stochastique avec les techniques de programmation dynamique en temps continu

B.1. Lemme d'Itô

Cette présentation est extraite de Roger (1991), pp 234-236.

Le lemme d'Itô est le résultat le plus utilisé des modèles en temps continu. Il permet de calculer la différentielle stochastique d'un processus stochastique $Y(t)$ à partir d'un processus stochastique $X(t)$ où $X(t)$ et $Y(t)$ sont liés par une relation fonctionnelle du type $Y(t) = F(X(t), t)$.

Cette généralisation est obtenue en appliquant la formule de Taylor à la fonction F et en appliquant les règles de calcul particulières à la différentielle stochastique du processus de Wiener.

Version unidimensionnelle du lemme d'Itô :

Soit $(X(t), t \geqslant 0)$ un processus d'Itô définit par :

$$dX(t) = \mu_X(X(t), t)\, dt + \gamma_X(X(t), t)\, dZ(t)$$

et F une fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, deux fois continûment différenciable.

Le processus $Y(t) = F(X(t), t)$ est un procesus d'Itô défini par :

$$dY(t) = \mu_Y(X(t), t)\, dt + \sigma_Y(X(t), t)\, dZ(t)$$

Avec

$$\begin{aligned}
\mu_Y(X(t),t) &= \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial X}\mu_X(X(t),t) + \sigma_X^2(X(t),t)\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right] \\
\gamma_Y(X(t),t) &= \frac{\partial F}{\partial X}\sigma(X(t),t)
\end{aligned}$$

Version multidimensionnelle du lemme d'Itô :

Soit $(X(t), t \geqslant 0)$ est un processus d'Itô définit par :

$$dX(t) = \mu_X(X(t),t)\,dt + \sigma_X(X(t),t)\,dZ(t)$$

où $X(t), dX(t), \mu_X(X(t),t)$ sont des vecteurs à n composantes.

$\gamma_X(X(t),t)$ est une matrice de dimension $(n \times m)$ et $dZ(t)$ est un vecteur à m composantes.

Soit $Y(t)$ un processus à k dimensions de la forme $Y(t) = F(X(t),t)$ où F est une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ à valeur dans $\mathbb{R}^k$ possédant des dérivées partielles secondes continues par rapport à chacun de ses arguments. On a alors :

$$dY(t) = \mu_Y(X(t),t)\,dt + \sigma_Y(X(t),t)\,dZ(t)$$

Avec

$$\begin{aligned}
\mu_Y(X(t),t) &= \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial X}\mu_X(X(t),t) + Tr\left(\sigma_X'\sigma_X\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right)\right] \\
\gamma_Y(X(t),t) &= \frac{\partial F}{\partial X}\sigma_X(X(t),t)
\end{aligned}$$

B.2. Preuve de l'équation stochastique (2.8) d'accumulation de capital humain :

Le développement de Taylor à l'ordre 2 de l'équation (2.3) a la forme suivante :

$$\begin{aligned}
k(t+\Delta t) &= k\left(t\right)+\frac{\partial k(t+\Delta t)}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial k(t+\Delta t)}{\partial \omega(t+\Delta t)}\Delta \omega+\frac{\partial k(t+\Delta t)}{\partial \theta(t,t+\Delta t)}\Delta \theta \\
&+\frac{\partial k(t+\Delta t)}{\partial \delta(t,t+\Delta t)}\Delta \delta+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial \omega^2(t+\Delta t)}\left(\Delta \omega\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial \theta^2(t,t+\Delta t)}\left(\Delta \theta\right)^2 \\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial \delta^2(t,t+\Delta t)}\left(\Delta \delta\right)^2+\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial \omega(t+\Delta t)\partial \theta(t,t+\Delta t)}\left(\Delta \omega \Delta \theta\right) \\
&+\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial \omega(t+\Delta t)\partial \delta(t,t+\Delta t)}\left(\Delta \omega \Delta \delta\right)+\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial \theta(t,t+\Delta t)\partial \delta(t,t+\Delta t)}\left(\Delta \theta \Delta \delta\right) \\
&+\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial t^2}\left(\Delta t\right)^2+\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial t\partial \omega(t+\Delta t)}\left(\Delta t \Delta \omega\right) \\
&+\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial t\partial \theta(t,t+\Delta t)}\left(\Delta t \Delta \theta\right)+\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial t\partial \delta(t,t+\Delta t)}\left(\Delta t \Delta \delta\right)+R\left(\Delta t\right)
\end{aligned}$$

En notant que les termes en Δt d'ordre 2 et au-delà sont infiniment "petits" devant Δt, ils seront systématiquement négligés dans les calculs. Les six derniers termes disparaissent donc du développement ci-dessus. En notant également que $\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial \omega^2}=\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial \delta^2}=0$, le développement de Taylor peut être réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
k(t+\Delta t) &= k\left(t\right)+\frac{\partial k(t+\Delta t)}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial k(t+\Delta t)}{\partial \omega\left(t+\Delta t\right)}\Delta \omega+\frac{\partial k(t+\Delta t)}{\partial \theta(t,t+\Delta t)}\Delta \theta \\
&+\frac{\partial k(t+\Delta t)}{\partial \delta(t,t+\Delta t)}\Delta \delta+\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial \omega(t+\Delta t)\partial \theta(t,t+\Delta t)}\left(\Delta \omega \Delta \theta\right) \\
&+\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial \omega(t+\Delta t)\partial \delta(t,t+\Delta t)}\left(\Delta \omega \Delta \delta\right)+\frac{\partial^2 k(t+\Delta t)}{\partial \theta(t,t+\Delta t)\partial \delta(t,t+\Delta t)}\left(\Delta \theta \Delta \delta\right)
\end{aligned}$$

t n'intervient pas directement comme variable d'état dans l'expression de $k(t+\Delta t)$, ce qui implique que $\frac{\partial k(t+\Delta t)}{\partial t}\Delta t = 0$. Le calcul des dérivées partielles et la substitution de $\Delta\omega, \Delta\theta$ et $\Delta\delta$ par leur valeur respectives (2.5), (2.6), et (2.7) donne :

$$\begin{aligned} k(t+\Delta t) - k(t) &= \frac{1}{\omega(t)}\left[1 - \delta(t,t+\Delta t) + \theta(t,t+\Delta t)\lambda(t)\right] k(t)\,\omega(t)\left(\mu_\omega \Delta t + \sigma'_\omega \Delta Z(t)\right) \\ &+ \frac{\omega(t+\Delta t)}{\omega(t)}\lambda(t)\,k(t)\left(\mu_\theta \Delta t + \sigma'_\theta \Delta Z(t)\right) - \frac{\omega(t+\Delta t)}{\omega(t)}k(t)\left(\mu_\delta \Delta t + \sigma'_\delta \Delta Z(t)\right) \\ &+ \frac{1}{\omega(t)}\lambda(t)\,k(t)\,\omega(t)\left(\mu_\omega \Delta t + \sigma'_\omega \Delta Z(t)\right)\left(\mu_\theta \Delta t + \sigma'_\theta \Delta Z(t)\right) \\ &- \frac{1}{\omega(t)}k(t)\,\omega(t)\left(\mu_\omega \Delta t + \sigma'_\omega \Delta Z(t)\right)\left(\mu_\delta \Delta t + \sigma'_\delta \Delta Z(t)\right) \end{aligned}$$

En simplifiant par $\omega(t)$, à la première, troisième et quatrième ligne ; en mettant $k(t)$ en facteur et en le passant du côté gauche de l'équation et en développant les cinq derniers termes on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta k(t)}{k(t)} &= \left[1 - \delta(t,t+\Delta t) + \theta(t,t+\Delta t)\lambda(t)\right]\left(\mu_\omega \Delta t + \sigma'_\omega \Delta Z(t)\right) \\ &+ \frac{\omega(t+\Delta t)}{\omega(t)}\lambda(t)\left(\mu_\theta \Delta t + \sigma'_\theta \Delta Z(t)\right) - \frac{\omega(t+\Delta t)}{\omega(t)}\left(\mu_\delta \Delta t + \sigma'_\delta \Delta Z(t)\right) \\ &+ \lambda(t)\left[\mu_\omega \mu_\theta (\Delta t)^2 + \mu_\omega \sigma'_\theta \Delta Z(t)\,\Delta t + \mu_\theta \sigma'_\omega \Delta Z(t)\,\Delta t + \rho_{\omega\theta}\sigma'_\omega \sigma_\theta (\Delta Z(t))^2\right] \\ &- \left[\mu_\omega \mu_\delta (\Delta t)^2 + \mu_\omega \sigma'_\delta \Delta Z(t)\,\Delta t + \mu_\delta \sigma'_\omega \Delta Z(t)\,\Delta t + \rho_{\delta\omega}\sigma'_\delta \sigma_\omega (\Delta Z(t))^2\right] \end{aligned}$$

Où ρ dénote la corrélation instantanée entre les processus stochastiques.

Lorsque Δt tend vers 0 :$\frac{\omega(t+\Delta t)}{\omega(t)} = 1$ et $\left[1 - \delta(t,t+\Delta t) + \theta(t,t+\Delta t)\lambda(t)\right] = 1$ d'après l'équation (2.3). Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta k(t)}{k(t)} &= \left(\mu_\omega dt + \sigma_\omega' dZ(t)\right) + \lambda(t)\left(\mu_\theta dt + \sigma_\theta' dZ(t)\right) - \left(\mu_\delta dt + \sigma_\delta' dZ(t)\right) \\ &+\lambda(t)\left[\mu_\omega \mu_\theta (dt)^2 + \mu_\omega \sigma_\theta' dZ(t)\, dt + \mu_\theta \sigma_\omega' dZ(t)\, dt + \rho_{\omega\theta}\sigma_\omega' \sigma_\theta (dZ(t))^2\right] \\ &- \left[\mu_\omega \mu_\delta (dt)^2 + \mu_\omega \sigma_\delta' dZ(t)\, dt + \mu_\delta \sigma_\omega' dZ(t)\, dt + \rho_{\delta\omega}\sigma_\delta' \sigma_\omega (dZ(t))^2\right]\end{aligned}$$

Enfin, d'après les propriétés du processus de Wiener standard : $(dt)^2 = dZ(t)\, dt = o(dt)$ et $(dZ(t))^2 = dt + o(dt)$. Lorsqu'on réarrange les termes, nous obtenons l'expression finale de l'équation stochastique d'accumulation de capital humain (2.8) :

$$\begin{aligned}\frac{dk(t)}{k(t)} &= \left(\mu_\omega + (\mu_\theta + \sigma_{\theta\omega})\lambda(t) - \mu_\delta - \sigma_{\delta\omega}\right) dt \\ &+ \left(\sigma_\omega + \sigma_\theta \lambda(t) - \sigma_\delta\right)' dZ(t)\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\omega} &= \rho_{\omega\theta}\sigma_\theta' \sigma_\omega = Cov(\omega, \theta) \\ \sigma_{\delta\omega} &= \rho_{\delta\omega}\sigma_\delta' \sigma_\omega = Cov(\delta, \omega)\end{aligned}$$

B.3. Preuve de l'équation (2.16)

Le premier terme de (2.15) dans la parenthèse peut être approximé par $u[c, l, , t]\Delta t$. En appliquant à $V[k, W, Y, t + \Delta t, T]$ le développement de Taylor à l'ordre 2, et en négligeant les termes d'ordre supérieurs[1], on obtient alors :

[1]C'est-à-dire tous les termes en $(dt)^\alpha$ avec $\alpha > 1$.

$$V\left[k\left(t\right),w\left(t\right),T\right] \equiv Max\ E_t\ \{u\left[c,l,t\right]\Delta t + V\left[k,W,T\right]$$
$$+ V_t\Delta t + V_k\Delta k + V_W\Delta W + V_Y\Delta Y + \frac{1}{2}\left(\Delta k\right)' V_{kk}\Delta k + \frac{1}{2}\left(\Delta W\right)' V_{WW}\Delta W$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\Delta Y\right)' V_{YY}\Delta Y + V_{kW}\left(\Delta k\right)'\Delta W + V_{kY}\left(\Delta k\right)'\Delta Y + V_{YW}\left(\Delta Y\right)'\Delta W\}$$

En simplifiant par $V\left[k,W,T\right]$ dans chaque membre de l'équation et en appliquant le lemme d'Itô, lorsque Δt tend vers 0, on trouve :

$$\begin{aligned} 0 \ \equiv \ & Max\ E_t\ \{u\left[c,l,t\right]dt + \left[\begin{array}{c} V_t + \mu_k V_k + \mu_W V_W + \mu_Y V_Y + \frac{1}{2}\sigma_k^2 V_{kk} + \frac{1}{2}\sigma_W^2 V_{WW} \\ +\frac{1}{2}\sigma_Y^2 V_{YY} + \sigma_k'\sigma_W V_{kW} + \sigma_k'\sigma_Y V_{kY} + \sigma_Y'\sigma_W V_{YW} \end{array}\right] dt \\ & + \left[\sigma_k V_k + \sigma_W V_W + \sigma_Y V_Y\right] dZ(t)\} \end{aligned} \tag{B.1}$$

Si l'on définit

$$\begin{aligned} dV \ = \ & \left[\begin{array}{c} V_t + \mu_k V_k + \mu_W V_W + \mu_Y V_Y + \frac{1}{2}\sigma_k^2 V_{kk} + \frac{1}{2}\sigma_W^2 V_{WW} \\ +\frac{1}{2}\sigma_Y^2 V_{YY} + \sigma_k'\sigma_W V_{kW} + \sigma_k'\sigma_Y V_{kY} + \sigma_Y'\sigma_W V_{YW} \end{array}\right] dt \\ & + \left[\sigma_k V_k + \sigma_W V_W + \sigma_Y V_Y\right] dZ(t)\} \end{aligned} \tag{B.2}$$

et que l'on développe l'opérateur d'espérance conditionnelle, on obtient l'*équation aux dérivées partielles stochastiques* (EDPS) suivante :

$$0 \equiv Max\ \{E_t\ u\left[c,l,t\right]dt + E_t\ dV\} \tag{B.3}$$

Cette équation peut être simplifiée car $Z(t)$ est un processus de Wiener standard. En effet, $E_t\left[dZ(t)\right] = 0$ et $E_t\left[\sigma_k V_k + \sigma_W V_W + \sigma_Y V_Y\right] dZ(t) = 0$. On peut alors écrire :

$$E_t dV = \begin{bmatrix} V_t + \mu_k V_k + \mu_W V_W + \mu_Y V_Y + \frac{1}{2}\sigma_k^2 V_{kk} + \frac{1}{2}\sigma_W^2 V_{WW} \\ +\frac{1}{2}\sigma_Y^2 V_{YY} + \sigma_k' \sigma_W V_{kW} + \sigma_k' \sigma_Y V_{kY} + \sigma_Y' \sigma_W V_{YW} \end{bmatrix} dt \tag{B.4}$$

En utilisant cette équation et l'équation suivante :

$$E_t u\left[c, l, t\right] = u\left[c, l, t\right] \tag{B.5}$$

On obtient une équation équivalente à (B.3), qui s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 \equiv\ & Max\ \{u\left[c, l, t\right] dt \\ & + \begin{bmatrix} V_t + \mu_k V_k + \mu_W V_W + \mu_Y V_Y + \frac{1}{2}\sigma_k^2 V_{kk} + \frac{1}{2}\sigma_W^2 V_{WW} \\ +\frac{1}{2}\sigma_Y^2 V_{YY} + \sigma_k' \sigma_W V_{kW} + \sigma_k' \sigma_Y V_{kY} + \sigma_Y' \sigma_W V_{YW} \end{bmatrix} dt\} \end{aligned} \tag{B.6}$$

Les paramètres associés aux processus d'Itô sont les suivants :

$$\begin{aligned} \mu_k &= \left(\mu_h + \mu_\omega + \left(\mu_\theta + \sigma_{\theta\omega}\right)\lambda - \mu_\delta - \sigma_{\delta\omega}\right) \\ \mu_W &= rW - c + \left(1 - \lambda - l\right) k + W\left(\mu - r1\right)' X \\ \sigma_k^2 &= \left(\sigma_\omega + \sigma_\theta \lambda - \sigma_\delta\right)' \left(\sigma_\omega + \sigma_\theta \lambda - \sigma_\delta\right) k^2 \\ \text{puisque } \sigma_k &= k\left(\sigma_\omega + \sigma_\theta \lambda - \sigma_\delta\right)' \\ \sigma_W^2 &= W^2 X' \sigma_s' \sigma_s X \text{ puisque } \sigma_W = W X' \sigma_s' \\ \sigma_k' \sigma_W &= kW\left(\sigma_\omega + \sigma_\theta \lambda - \sigma_\delta\right)' \sigma_s X \\ \sigma_k' \sigma_Y &= k\left(\sigma_\omega + \sigma_\theta \lambda - \sigma_\delta\right)' \sigma_Y \\ \sigma_Y' \sigma_W &= W X \sigma_Y' \sigma_s \end{aligned}$$

En divisant les deux membres de (B.6) par dt et en remplaçant μ_k, μ_W, σ_k^2, σ_W^2, $\sigma_k'\sigma_W$, $\sigma_k'\sigma_Y$ et $\sigma_Y'\sigma_W$, par leur expression ci-dessus, on obtient la version finale du programme de maximisation initial (2.12), qui correspond à l'équation (2.16) dans le texte :

$$
\begin{aligned}
0 \equiv\ & Max\ \{u\,[c,l] + V_k\left(\mu_\omega + \mu_\theta\lambda + \lambda\sigma'_\theta\sigma_\omega - \delta - \sigma'_\omega\sigma_\delta\right)k \\
& + V_W\left[rW + (1-\lambda-l)\,k - c + WX\,(\mu - r)\right] \\
& + \frac{1}{2}V_{WW}W^2X^2\sigma_s^2 + \frac{1}{2}V_{kk}\left(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta\right)'\left(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta\right)k^2 \\
& + V'_Y\mu_Y + \frac{1}{2}V_{YY}\sigma'_Y\sigma_Y + WXV_{WY}\sigma'_s\sigma_Y + V_{kW}\left(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta\right)'\sigma_s kWX \\
& + V_{kY}k\left(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta\right)'\sigma_Y - \rho V + V_t\}
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

B.4. Augmentation du risque sur un actif financier particulier

Nous montrons l'effet de l'augmentation du risque sur un actif particulier dans le portefeuille optimal sur la part investie dans cet actif toutes choses égales par ailleurs.

On suppose pour simplifier la démonstration qu'il n'y a que deux actifs risqués qui composent le portefeuille optimal. On suppose également que le rendement des actifs risqués est indépendant des autres variables risquées (capital humain et variables d'état) de sorte que $\sigma'_s\sigma_\omega = \sigma'_s\sigma_\theta = \sigma'_s\sigma_\delta = \sigma'_s\sigma_Y = 0$. Dans ces conditions, la demande optimale d'actifs risqués s'écrit :

$$X^* = -\frac{V_w}{V_{ww}W}\frac{\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\,\mu_2 - r}{\left[\sigma_1 + (1-\alpha)\,\sigma_2\right]^2}$$

Où α mesure la part de la richesse investie dans l'actif 1 et $(1-\alpha)$ la part investie dans l'actif 2. $\mu_1$et σ_1 désignent la moyenne et la volatilité de l'actif 1 et μ_2 et σ_2 désignent la moyenne et la volatilité de l'actif 2.

La part optimale α^* du portefeuille investie dans l'actif 1 est la solution de l'équation suivante :

$\frac{dX^*}{d\alpha} = 0$

$\frac{dX^*}{d\alpha} = \left[-\frac{1}{W} \frac{V'_w}{V''_{w^2}} \frac{\mu_1 - \mu_2}{(\sigma_1 + \sigma_2 (1-\alpha))^2} - \frac{2}{W} \sigma_2 \frac{V'_w}{V''_{w^2} (\sigma_1 + \sigma_2 (1-\alpha))^3} (\alpha \mu_1 - r + \mu_2 (1-\alpha)) \right]$

On en déduit que

$$\alpha^* = \frac{1}{-\sigma_2 \mu_1 + \sigma_2 \mu_2} (-2r\sigma_2 + \sigma_1 \mu_1 - \sigma_1 \mu_2 + \sigma_2 \mu_1 + \sigma_2 \mu_2)$$

ssi

$$V'_w \neq 0 \wedge -\sigma_2 \mu_1 + \sigma_2 \mu_2 \neq 0$$

On peut alors mesurer l'effet de l'augmentation du risque de chaque actif sur la part optimale investie :

$$\frac{d\alpha^*}{d\sigma_1} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2 \mu_1 - \sigma_2 \mu_2} = -\sigma_2^{-1} < 0$$

L'augmentation du risque sur l'actif 1 réduit la part investie dans cet actif et par conséquent accroît la part investie dans l'actif 2. De même, l'augmentation du risque sur l'actif 2 augmente la part investie dans l'actif 1 (et donc réduit la part investie dans l'actif 2).

$$\frac{d\alpha^*}{d\sigma_2} = \left[\frac{1}{\sigma_2 \mu_1 - \sigma_2 \mu_2} (2r - \mu_1 - \mu_2) - \frac{\mu_1 - \mu_2}{(\sigma_2 \mu_1 - \sigma_2 \mu_2)^2} (2r\sigma_2 - \sigma_1 \mu_1 + \sigma_1 \mu_2 - \sigma_2 \mu_1 - \sigma_2 \mu_2) \right]$$

$$\frac{d\alpha^*}{d\sigma_2} = \sigma_2^{-2} \sigma_1 > 0$$

Enfin, on notera que l'augmentation du rendement moyen d'un actif risqué accroît la demande pour cet actif :

$\frac{d\alpha^*}{d\mu_1} = \left[\frac{1}{\sigma_2 \mu_1 - \sigma_2 \mu_2} (-\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{\sigma_2}{(\sigma_2 \mu_1 - \sigma_2 \mu_2)^2} (2r\sigma_2 - \sigma_1 \mu_1 + \sigma_1 \mu_2 - \sigma_2 \mu_1 - \sigma_2 \mu_2) \right]$

$\frac{d\alpha^*}{d\mu_1} = 2\left(\mu_1 - \mu_2\right)^{-2}\left(\mu_2 - r\right) > 0$

$\frac{d\alpha^*}{d\mu_2} = \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2\mu_1 - \sigma_2\mu_2} + \frac{\sigma_2}{\left(\sigma_2\mu_1 - \sigma_2\mu_2\right)^2}\left(2r\sigma_2 - \sigma_1\mu_1 + \sigma_1\mu_2 - \sigma_2\mu_1 - \sigma_2\mu_2\right)\right]$
$\frac{d\alpha^*}{d\mu_2} = (-2)\left(\mu_2 - \mu_1\right)^{-2}\left(\mu_1 - r\right) > 0$

B.5. Solutions explicites

$V(.)$ désigne la fonction valeur définie par :

$$J(t, W, k, u) = e^{-\rho t} V(t, W, k, u)$$

En utilisant les mêmes techniques décrites dans les annexes précédentes, on sait que le programme (2.25) est équivalent à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman suivante :

$$\begin{aligned}
0 \equiv\ & Max\ \{U[c,l] + V_k\left(\mu_\omega + \mu_\theta\lambda - \mu_\delta + \lambda\sigma'_\theta\sigma_\omega - \sigma'_\delta\sigma_\omega\right)k \\
& + V_W\left[rW + (1 - \lambda - l - \mu_u)k - c + WX(\mu - r) - kWX\sigma'_s\sigma_u\right] \\
& + \frac{1}{2}V_{WW}\left[W^2X^2\sigma'_s\sigma_s - 2kWX\sigma'_s\sigma_u + k^2\sigma'_u\sigma_u\right] + \frac{1}{2}V'_{kk}\left(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta\right)'\left(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta\right)k^2 \\
& + V'_u\mu_u + \frac{1}{2}V_{uu}\sigma'_u\sigma_u + V_{Wu}\left[WX\sigma'_s\sigma_u - k\sigma'_u\sigma_u\right] + V_{kW}\left(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta\right)'\left[WX\sigma'_s - k\sigma_u\right]k \\
& + V_{ku}k\left(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta\right)'\sigma_u - \rho V + V_t\} \qquad \text{(B.8)}
\end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre donnent les quatre solutions suivantes :

$$U_c - V_W = 0 \qquad \text{(B.9)}$$

$$U_l - V_W k = 0 \qquad \text{(B.10)}$$

$$X = -\frac{V_W}{V_{WW}W}\frac{(\mu - r) - k\sigma_s'\sigma_u}{\sigma_s'\sigma_s} + \frac{k}{W}\frac{\sigma_s'\sigma_u}{\sigma_s'\sigma_s} - \frac{V_{Wu}}{V_{WW}W}\frac{\sigma_s'\sigma_u}{\sigma_s'\sigma_s} - \frac{V_{kW}}{V_{WW}W}\frac{(\sigma_\omega + \lambda\sigma_\theta - \sigma_\delta)'\,\sigma_s}{\sigma_s'\sigma_s}k \tag{B.11}$$

$$\lambda = \frac{-V_k}{V_{kk}k}\frac{1}{\sigma_\theta'\sigma_\theta}\left(\mu_\theta + \sigma_\theta'\sigma_\omega - \frac{V_W}{V_k}\right) - \frac{(\sigma_\omega'\sigma_\theta - \sigma_\delta'\sigma_\theta)}{\sigma_\theta'\sigma_\theta} - \frac{V_k}{V_{kk}k}\left[\frac{V_{ku}\sigma_\theta'\sigma_u}{V_k\sigma_\theta'\sigma_\theta} - \frac{V_{kW}\sigma_\theta'\sigma_u k}{V_k\sigma_\theta'\sigma_\theta}\right] \tag{B.12}$$

Si les préférences sont décrites par a fonction d'utilité instantanée log :

$$U = \phi_c \ln c + (1 - \phi_c)\ln l$$

La solution générale du programme (2.25) est la fonction valeur suivante :

$$V(k, t, W, uT) = A(t, T)\ln\left[B(t, T)\,k + W - C(t, T)\,u\right] \tag{B.13}$$

$$
\begin{aligned}
V_W &= A(t,T)\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right]^{-1} \\
V_k &= A(t,T)B(t,T)\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right]^{-1} \\
V_u &= -A(t,T)C(t,T)\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right]^{-1} \\
V_{WW} &= -A(t,T)\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right]^{-2} \\
V_{kk} &= -A(t,T)B(t,T)^2\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right]^{-2} \\
V_{uu} &= -A(t,T)C(t,T)^2\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right]^{-2} \\
V_{Wk} &= -A(t,T)B(t,T)\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right]^{-2} \\
V_{Wu} &= A(t,T)C(t,T)\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right]^{-2} \\
V_{ku} &= A(t,T)B(t,T)C(t,T)\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right]^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{V_{kk}k}{V_k} &= \frac{B(t,T)k}{\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right]} < 1 \\
-\frac{V_{WW}W}{V_W} &= \frac{W}{\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right]} < 1
\end{aligned}
$$

En remplaçant ces résultats dans les solutions générales (B.9), (B.10), (B.11), (B.12), on obtient les solutions explicites du programme (2.25) :

$$
c^* = \frac{\phi_c}{A(t,T)}\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right] \tag{B.14}
$$

$$
l^* = \frac{1-\phi_c}{A(t,T)k}\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right] \tag{B.15}
$$

$$
X^* = \frac{\left[B(t,T)k + W - C(t,T)u\right]}{W}\frac{(\mu - r) - k\sigma_s'\sigma_u}{\sigma_s'\sigma_s} + \frac{k}{W}\frac{\sigma_s'\sigma_u}{\sigma_s'\sigma_s} + \frac{C(t,T)}{W}\frac{\sigma_s'\sigma_u}{\sigma_s'\sigma_s} - \frac{B(t,T)}{W}\frac{(\sigma_\omega - \sigma_\delta)'\sigma_s}{\sigma_s'\sigma_s}k \tag{B.16}
$$

$$\lambda^{*}=\frac{\left[B\left(t,T\right)k+W-C\left(t,T\right)u\right]}{B\left(t,T\right)k}\frac{1}{\sigma_{\theta}^{\prime}\sigma_{\theta}}\left(\mu_{\theta}+\sigma_{\theta}^{\prime}\sigma_{\omega}-\frac{1}{B\left(t,T\right)}\right)-\frac{\left(\sigma_{\omega}^{\prime}\sigma_{\theta}-\sigma_{\delta}^{\prime}\sigma_{\theta}\right)}{\sigma_{\theta}^{\prime}\sigma_{\theta}}+\frac{1+C\left(t,T\right)}{B\left(t,T\right)}\frac{\sigma_{\theta}^{\prime}\sigma_{u}}{\sigma_{\theta}^{\prime}\sigma_{\theta}} \tag{B.17}$$

B.6. Incertitude sur la probabilité de chômage futur

Nous supposons que l'offre travail est exogène (le loisir disparaît du modèle)

Le revenu du travail espéré par l'individu est :

$$E_t(y(t))=\left(1-u(t)\right)\left(1-\lambda(t)\right)k(t)+u(t)b$$

Où b désigne le revenu alternatif au travail. Pour simplifier nous supposons que $b=0$, de sorte que $E(y(t))=\left(1-u(t)\right)\left(1-\lambda(t)\right)k(t)$.

On suppose que l'évolution de la probabilité de chômage est décrite par le processus de Wiener suivant :

$$du(t)=\mu_u dt+\sigma_u^{\prime}dZ(t)$$

En utilisant ce résultat et remplaçant la valeur de $E_t(y(t))$ dans l'équation de budget intertemporelle, (2.11) on obtient en appliquant le lemme d'Itô :

$$dW=\left[(rW(+\left(1-\mu_u\right)\left(1-\lambda\right)k-c)+W\left(\mu-r1\right)^{\prime}X+(1-\lambda)kX\sigma_{su}\right]dt+\left[WX^{\prime}\sigma_s-(1-\lambda)k\sigma_u\right]^{\prime}dZ$$

$$
\begin{aligned}
0 \equiv\ & Max\ \{u\,[c,l,k,t] + V_k k\,(\mu_\omega + (\mu_\theta + \sigma_{\theta\omega})\,\lambda - \mu_\delta - \sigma_{\delta\omega}) \\
& + V_w \left[rW - c + W\,(\mu - r1)'\,X - \mu_u\,(1-\lambda)\,k + (1-\lambda)kX\sigma_{su}\right] \\
& + \frac{1}{2} V_{kk} k^2 \left(\sigma_\omega^2 + \sigma_\theta^2 \lambda^2 + \sigma_\delta^2 + 2\sigma_{\theta\omega}\lambda - 2\sigma_{\theta\delta}\lambda - 2\sigma_{\delta\omega}\right) \\
& + \frac{1}{2} V_{WW} W^2 X^2 \left[\sigma_s - \sigma_u\,(1-\lambda)\right]^2 + V_{kw} kWX\left[\sigma_s - \sigma_u\,(1-\lambda)\right]'(\sigma_\omega + \sigma_\theta\lambda - \sigma_\delta) \\
& + \frac{1}{2} V_{uu}\sigma_u^2 + V_{ku} k\,(\sigma_\omega + \sigma_\theta\lambda - \sigma_\delta)'\,\sigma_u + V_{Wu}' WX\left[\sigma_s - \sigma_u\,(1-\lambda)\right]'\sigma_u + V_t\}
\end{aligned}
$$

Nous supposons que le marché financier fonctionne de manière indépendante du marché du travail, de sorte que les corrélations entre entre la valeur des actifs risqués et la probabilité de chômage et entre la valeur des actifs risqués et les variables relatives au processus d'accumulation du capital humain sont nulles. Le niveau optimal d'investissement dans le capital humain est la solution de l'équation suivante :

$0 = kV_k\,(\mu_\theta + \sigma_{\theta\omega}) + kV_w\mu_u + k^2 V_{k^2}\,(\sigma_{\theta\omega} - \sigma_{\theta\delta} + \lambda\sigma_\theta^2) + V_{W^2}\,(-X^2W^2\sigma_u^2 + X^2W^2\lambda\sigma_u^2) + W\,(V_{kW})\,kX\,(-\sigma_{u\theta} - \sigma_{u\delta} + \sigma_{u\omega} + 2\lambda\sigma_{u\theta})$

$0 = kV_k\,(\mu_\theta + \sigma_{\theta\omega}) + kV_w\mu_u + k^2 V_{k^2}\,(\sigma_{\theta\omega} - \sigma_{\theta\delta} + \lambda\sigma_\theta^2) - V_{W^2}X^2W^2\sigma_u^2 + V_{W^2}X^2W^2\lambda\sigma_u^2 + 2V_{kW}kWX\lambda\sigma_{u\theta} + V_{kW}kWX\,(-\sigma_{u\theta} - \sigma_{u\delta} + \sigma_{u\omega})$

On en déduit :

$$
\lambda^* = \frac{(kV_w\mu_u + kV_k\,(\mu_\theta + \sigma_{\theta\omega}) + XkWV_{kW}\,(-\sigma_{u\theta} - \sigma_{u\delta} + \sigma_{u\omega}) + k^2V_{k^2}\,(-\sigma_{\theta\delta} + \sigma_{\theta\omega}) - X^2W^2\sigma_u^2 V_{W^2})}{-2XkW\sigma_{u\theta}V_{kW} - k^2\sigma_\theta^2 V_{k^2} - X^2W^2\sigma_u^2 V_{W^2}}
$$

Nous faisons l'hypothèse d'une fonction d'utilité séparable de sorte que $V_{kW} = 0$. On obtient :

$$
\lambda^* = \frac{1}{-k^2\sigma_\theta^2 V_{k^2} - X^2W^2\sigma_u^2 V_{W^2}} \left(kV_w\mu_u + kV_k\,(\mu_\theta + \sigma_{\theta\omega}) + k^2V_{k^2}\,(-\sigma_{\theta\delta} + \sigma_{\theta\omega}) - X^2W^2\sigma_u^2 V_{W^2}\right)
$$

Soit

$$\lambda^{*}=\frac{kV_{w}\mu_{u}+kV_{k}\left(\mu_{\theta}+\sigma_{\theta\omega}\right)}{-k^{2}\sigma_{\theta}^{2}V_{k^{2}}-X^{2}W^{2}\sigma_{u}^{2}V_{W^{2}}}+\frac{k^{2}V_{k^{2}}\left(-\sigma_{\theta\omega}+\sigma_{\theta\delta}\right)-X^{2}W^{2}\sigma_{u}^{2}V_{W^{2}}}{-k^{2}\sigma_{\theta}^{2}V_{k^{2}}-X^{2}W^{2}\sigma_{u}^{2}V_{W^{2}}}$$

Ainsi, l'effet d'une augmentation du taux de chômage moyen sur la demande optimale d'éducation est :

$$\frac{d\lambda^{*}}{d\mu_{u}}=k\frac{V_{w}}{-k^{2}\sigma_{\theta}^{2}V_{k^{2}}-X^{2}W^{2}\sigma_{u}^{2}V_{W^{2}}}>0$$

L'effet du risque sur le taux de chômage futur est donné par :

$$\frac{d\lambda^{*}}{d\sigma_{u}^{2}}=\frac{\left(V_{w}\mu_{u}+V_{k}\mu_{\theta}+V_{k}\sigma_{\theta}\sigma_{\omega}+k\sigma_{\theta}\sigma_{\delta}V_{k^{2}}-k\sigma_{\theta}\sigma_{\omega}V_{k^{2}}+k\sigma_{\theta}^{2}V_{k^{2}}\right)X^{2}\left(V_{W^{2}}\right)kW^{2}}{\left(X^{2}bW^{2}V_{W^{2}}+k^{2}\sigma_{\theta}^{2}V_{k^{2}}\right)^{-2}}$$

Enfin, nous déterminons le signe de l'effet du risque de chômage sur la demande optimale d'éducation en faisant apparaître l'expression de l'indice d'aversion au risque $\left(-\frac{V_{k2}}{V_{k}}\right)$ dont on sait qu'il est positif :

$$\frac{d\lambda}{d\sigma_{u}^{2}}=\frac{\overbrace{\left[V_{w}\mu_{u}+V_{k}\mu_{\theta}+V_{k}\sigma_{\theta\omega}-V_{k}k\sigma_{\theta\delta}\left(-\frac{V_{k^{2}}}{V_{k}}\right)+V_{k}k\sigma_{\theta\omega}\left(-\frac{V_{k^{2}}}{V_{k}}\right)+k\sigma_{\theta}^{2}V_{k^{2}}\right]}^{>0}\overbrace{X^{2}\left(V_{W^{2}}\right)kW^{2}}^{<0}}{\underbrace{\left(X^{2}bW^{2}V_{W^{2}}+k^{2}\sigma_{\theta}^{2}V_{k^{2}}\right)^{2}}_{>0}}<0$$